

STILLMAN DRAKE

RB 152 675

LIBRARY
of the
UNIVERSITY
of
TORONTO

CF 399

GEOMETRICA DEMONSTRATIO
THEOREMATUM
HUGENIANORUM

CIRCA

LOGISTICAM, SEU LOGARITHMICAM LINEAM,

Qua occaſione plures Geometricę Methodi exhibentur circa Tangentes, Quadraturas, Centra gravitatis, Solida, &c. variarum curvarum, utì infinitarum Parabolarum, Hyperbolarum, Spiralium, &c. Aliæque Geometricæ Veritates illuſtrantur.

ADDITA EPISTOLA GEOMETRICA AD P. THOMAM CEVAM S. J.

AUCTORE

D. GUIDONE GRANDO

CREMONENSI,

Monacho Camaldulenſi, & in Almo Piſano Lyceo Publ. Phyloſophiæ Profeſſore.

AD SERENISSIMUM

FERDINANDUM III.
MAGNUM ETRURIÆ PRINCIPEM.

FLORENTIÆ, MDCCI.

Typis Regiæ Celſit. Apud Petrum Antonium Brigonci.

Superiorum Permiſſu.

SERENISSIME

PRINCEPS.

Singularis in Bonas Artes, maximèque in Mathematicas Diſciplinas Ser. Celſ. Tuæ Genius, atque in earumdem cultores MEDICEO PRINCIPE verè digna Propenſio, & animum, & ſtimulos addiderunt, ut apud eamdē Celſitudinem Tuam Opuſculum hoc Geometricum collocarem. Enimverò maximum operæ compendium facturum me intellexi, ubi ſpeculatio-

nes

nes has meas ejuſmodi Principi conſecrarem, apud quem, & Scientiæ ſublimitas, & Argumenti præſtantia, & Doctrinæ utilitas nonniſi ſuperfluè commendanda foret, nec repetitis, aut votis, aut precibus opus eſſet ad illius Tutelam Operi ſimul, Auctorique impetrandam. Horum ſcilicet ſtudiorum pretium abundè noſti, Principum Optime, imò & nos ipſos non opere minùs, quàm verbo doces, quanti ipſa facienda ſint, dum in illorum præſidium, qui eadem promovere ſtudent, ultrò Ipſe deſcendis, quò confidentiùs, & ſecuriùs ad Te accedere non vereantur. Omne igitur officium ſatis explevero, ſi citra verborum circuitum, brevi dumtaxat, ſimplicique narratione, quale mihi argumentum hìc tractandum ſuſceperim, aperuero.

Clariſſimus Vir Chriſtianus Hugenius (notum Celſitudini Tuæ nomen, pro Litteraria, qua tantoperè excellis, Eruditione Tua, in Aſtronomicis præſertim, Phyſicis, & Geometricis rebus, quas ille diſciplinas ſummè illuſtravit) ex Logiſticæ, *ſeu* Logarithmicæ *Lineæ proprietatibus nonnullas planè admirabiles ad calcem ſuæ Diatribæ de cauſa Gravitatis, citra demonſtrationem ullam, nudè propoſuit, quibus*

ipſe-

ipſemet uſus fuerat, ad arduas phyſicæ verita-tes in eodem tractatu indicandas, variorumq; problematum determinationem, ad motum cor-porum, ſeu per aerem projectorum, ſeu proprio pondere deſcendentium, computata etiam medii reſiſtentia, pertinentium expediendam. Quum itaque inſignes adeò, ac geometrica contempla-tione per ſe digniſſimas eſſe proprietates illas animadverterem, ac prætereà in Philoſophicis etiam uſum habere poſſe, è re futurum judica-vi, ut iiſdem demonſtrandis operam darem, quò pleniùs de ipſarum veritate conſtaret, eòq; tutiùs deinceps ad Phyſicam transferrentur; Longiſ-ſimè ſiquidem à Geometriæ ditione exulare co-gnoveram Pythagoricum illud, Ipſe dixit, *par-vamque adeò ſolius pronunciantium Auctoritatis in hac Scientia rationem haberi; atq; id quidem meritò, quippe & Magnorum aliquando Virorum determinationibus abſque demonſtratione propo-ſitis (ſeu methodi, ſeu applicationis, ſeu calculi lapſu, quem in extendenda demonſtratione fa-cillimè animadvertiſſent) falſitatem irrepſiſſe deprehendimus. Evidentiam itaque in ejuſmodi eſſe exigendam, quæ Geometricis potiſſimùm ra-tiociniis eſt concilianda. Geometricè idcircò ſin-*

gu-

gulas ex propoſitis ab Hugenio Logiſticæ Proprietatibus demonſtrare aggreſſus ſum, nec uno plerumque modo, ſed pluribus, iiſque admodùm generalibus, atque ad infinitarum Parabolarũ, Hyperbolarum, Spiralium, aliarumq; variarũ curvarum Tangentes, Quadraturas, Solida determinanda conducentibus, ut non ſoli Logiſticæ, ſed omnibus ferè ſub Geometricam conſiderationem cadentibus figuris, præſentis Opuſculi utilitas communis eßet.

Et hic quidem, SERENISS. PRINCEPS, hujus Commentarioli mei ſcopus, hæc ſumma eſt, quod cùm per ſe ſe exiguum ſit, ſuique ratione Auctoris obſcurum, Tui Nominis tamen Luce ejus fronti affulgente, non uſque adeò vileſcere poterit, imò & ſupra conditionis, atque indolis ſuæ ſortem ſperare incipiet; quamquàm id unum mihi abundè ſuffecturum ſit, ut mei erga S.C.T. obſequii, gratæq; erga Auguſtiſſimam MEDICEAM Domum, cui tot beneficiis devincor, obſervantiæ, acceptum Tibi pignus, perpetuumque in omnem poſteritatis memoriam monumentum exiſtat.

Ex Monaſt. Angelorum Flor. Idib. Julii MDCCI.

Sereniß. Celſitud. Tuæ

Humillimus, Addictiſſ. atque Obſequentiſs. Famulus
D. Guido Grandus Monachus Camald.

AD LECTOREM
PRÆFATIO.

1 COnſuetudinis eſt apud Geometras vetuſtiſſimæ, ut quæ ab aliis ſine demonſtratione propoſita ſunt, ſive Theoremata, ſive Problemata, ſibimet oſtendenda, ac geometricè confirmanda aſſumant, vel exercitationis propriæ, vel communis utilitatis gratia, ut certa ab incertis, à falſis vera ſecerni poſſint, atque hæc tutò recipi, ac in uſum, ſi quem habent, converti, illa tanquam ſpuria, & fallaciter aſſerta reſpui, & amandari; id vel ex uno Archimede conſtare poteſt, qui in Præfatione ad Libros Spiralium, Cononem ſummis laudibus celebrat, ejuſque inventa Mathematicis ſine demonſtratione propoſita, ſibi demonſtranda aſſumit; id quod tã accuratè, tantoq; ingenio præſtitit, *ut*, Bullialdo teſte, *in ſui admirationem, cùm æquales, tum poſteros converterit; laudum titulos, nullo oblivionis ſitu inducendos, meruerit, earumque* (Spiralium) *inventori Cononi gloriam, palmamque præripuerit*. Enimverò qui in aliorum propoſitionibus demonſtrã-

dis operam collocant, quàm arduam, difficilemque in ſe provinciam ſuſcipiant, Vir Cl. Galilæus in Trutinatore, *pag.* mihi 48. luculenter oſtendit, dum ait: *Longè ſublimioris ingenii eſt alieni Problematis enodatio, aut oſtenſio Theorematis, quàm novi cujuſpiam inventio; Hæc quippæ fortunæ in incertum vagantibus obviæ plerumque eſſe ſolet; tota verò illa, quanta eſt, ſtudioſiſſimam attentæ mentis, in unum aliquem ſcopum collimantis, ratiocinationem expoſcit.*

2 Eumdem & ipſe pulverem agitare aggreſſus, quemadmodùm ante biennium Vivianea Problemata Tibi geometricè demonſtrata obtuli, innumeris aliis veritatibus, ſeu planè novis, ſeu majori compendio ex prolixa Veterum ſupellectili deductis, Conicorumque præſertim Fornicum Tetragoniſmo locupletata; ita nunc HUGENIANA THEOREMATA, longè adhuc plurium ſpeculationum campum, pro variis, iiſque generalibus methodis, quibus in eorumdem demonſtratione uti placuit, aperientia, communicare propoſui. Seriùs id quidem, ſi Theorematum Hugenii propoſitionem ſpectes, illa quippe ad calcem Diatribæ *de Cauſa Gravitatis*, Tractatui *de Lumine* ejuſdem Auctoris adnexæ, uſque ab Anno 1690. Lugduni Batavorum excuſa jam proſtant; Sin verò eadem animadvertēdi copiā ante paucos mēſes mihi nunc primùm factam attendas, ſatis adhuc tempeſtivè. Hoc ſcilicet Anno dumtaxat, quum Piſis degerem, & obeundis Phyloſophicæ Cathedræ, ad quam Regiæ Magni Etruriæ Ducis Celſitudinis Benefi-

ficentia nuper vocatus fueram, muneribus incumberem, apud Humaniſſimum æquè, ac Nobiliſſimum Juvenem Lucam Albizium S.Stephani Equitem, in his, quæ ad Geometriam, ad Phyſicam, multiplicemque Eruditionem ſpectant, apprimè verſatum, prælaudati Hugeniani Tractatus exemplar tandem invenire, ac ſedulò evolvere potui. Rapuit animum ſtatim Propoſitionum illarum, quæ & ſcitu jucundæ, & veſtigatu difficiles videbantur, Utilitas, atque Elegantia, inde ſiquidem, ipſomet Hugenio fatente, pendere videbam, quæ Vir Clariſſimus de Gravium projectione perpendiculari, & obliqua, eorumque deſcenſu pronunciaverat, in hypotheſi, quòd reſiſtentiæ mediorum in eadem ratione creſcerent, cum velocitatibus corporum, utì eatenus creditum fuerat; Ac de Phyſicis quidem Propoſitionibus vix ſollicitus fui, quum jam de hypotheſi non conveniret, majorque, Hugenio teſte, ſe oblatura eſſet in ipſarum demonſtratione difficultas, quàm quæ rei pretio compenſaretur.

3 De Geometricis ſecus apud me ſtatui: legeram apud Serenum Antiſtenſem Epiſt. ad Cyrum, præfixa lib. 1. de ſect. cylindri. *Abſurdum omninò videri, Geometras ipſos de Problemate Geometrico ſine demonſtratione quicquam affirmare;* & quamvis longiſſimè abeſſem ab ejuſmodi conſuetudine generaliter idcircò damnanda, quum ſcirem, juſtis de cauſis, ſeu temporis inopia, ſeu brevitatis ſtudio, ſive exercitationis Lectorum gratia, id aliquando licere, quemadmodum & nobis, tum in proximè edito, tum in præſen-

§ 2 ti

ti etiam Opuſculo nonnulla exciderunt citra demonſtrationem aſſerta, Geometriæ tamen, ac Phyſicæ promovendæ plurimùm intereſſe putavi, ut miranda hæc Theoremata ad Logiſticam pertinentia tandem demonſtrarentur, è quibus, quemadmodùm illæ, quas ſupra ex Hugenio laudabam, ita aliæ, & aliæ Phyloſophicæ Veritates certioribus hypotheſibus innixæ profluere poſſent, quamdiù autem illa per legitimam demonſtrationem firmas radices non agerent, inculta planè, ac ſterilia jacerent. Et proprio igitur genio, & Amicorum ſtimulis accedentibus, ut in Logiſticæ Proprietatum ab Hugenio propoſitarum veritatem inquirerem, de iiſdem accuratè demonſtrandis cogitare cœpi. Quod quidem fœliciùs, quàm ab initio ſperaveram, deinde ſucceſſit, paucarum quippe horarum meditatione, octo priorum Theorematum (quinto excepto, quod abſtruſiorem ſibi poſcere indaginem prævideram) demonſtrationem inveni, nec multis poſt diebus reliqua omnia enucleavi, præter duodecimum, tertiumdecimum, ac quintum jam ab initio intermiſſum, quorum Veritas, ut in apertam lucem, vel ipſa ſpontè prodiret, vel educi ſe non invita pateretur, longioris operæ officiis invitanda, roganda, ac tantùm non per vim extrahenda fuit, nobiliorem quippe manum fortaſſe expectãs, obſcuri hominis conatus refractaria dedignabatur.

4 Sed quorſum, inquies, à tanto Viro propoſita in examen vocare, & ad demonſtrationis amuſſim expendere oportuerat? An non ſatis tutò admitti pote-

te-

terant, citra ſuſpicionem ullam falſitatis, vel hoc ipſo, quòd Acutiſſimus ille, & tot nominibus celebris Geometra rem ita ſe habere fidenter aſſeruerat? Archimedi, quidquid diceret, credendum deinceps eſſe Hyeron Syracuſius, & Gelon Siciliæ Rex pronunciarunt, apud Proclum *lib. 2. cap.* 3. poſtquàm Navim contra omnium opinionem loco moviſſet, & Artificis fraudem ex Coronæ pondere ad calculos revocaſſet; Quid ni igitur, citra aliam indaginem, & Chriſtiano Hugenio credimus, poſt fœliciter detectum Saturniũ Annulum, poſt oſtenſas Curvarum Evolutarum proprietates, Cycloidis longitudinem demonſtratam, Pendulique oſcillationes ad iſochroniſmum revocatas, ut de aliis taceamus præclaris inventis, quibus Phyſicam, Aſtronomiam, & Matheſim denique univerſam inſigniter illuſtravit? Hæc certè ſi Archimedis tempore propoſita fuiſſent, non minùs veſtigatu ardua, inventuque difficilia cenſeri poterant, quàm minimæ potentiæ ad maximum pondus movendum per machinam elevatio, vel aurea corona permixti argenti diſcretio.

5 Ultrò ipſe fateor, dignos eſſe ſummos Geometras, utpotè Veritatis commercio maximè omnium aſſuetos, quibus, etiam eorum, quæ pronunciant, demonſtrationem reticentibus, fides nihilominus habeatur; neque enim *Mathematicos* conceſſo *Hiſtoricis* privilegio quis jure fraudaverit, quum ipſa *Geometria* à Pythagora *Hiſtoria* appellari conſueverit, teſte Jamblico in ejus vita, cap. 18. imò longè potior illius

ſit,

ſit, quàm iſtius ratio, quippe nulla ex parte, aut à lubricis famæ rumoribus, aut ab incertis documentis, aut à præoccupato partium ſtudio ſibimet imponi patitur Geometra, quum quidquam aſſerit, ſed quod evidenti dumtaxat ratione apud ſe conſtiterit pronunciare ſolet; quo nomine perfectam Hyſtoriæ ideã Geometria præbet, quam utinam imitarentur qui Hiſtoricos agunt, nec quicquam temerè ſolis conjecturis ducti, prout ſibi ſomniaverint, deſcriberent, ſed ea dumtaxat, quibus (quantùm materia patitur) demonſtrandis ſe idoneos, & paratos ſentiunt! Nil tamen vetat, quin & ipſi Geometræ, cùm homines ſint, lapſibus quoque obnoxii eſſe poſſint, primo ſiquidem obtutu veri ſpeciem prætendere poteſt fallax quoddã ratiocinium Geometrarum mẽtibus uno impetu objectum, illoſque in errorem inducere, à quo facilè ſibi caviſſent, ſi ſpeculationum ſuarum demonſtrationẽ per extenſum adducere, ac per ſingulas partes attentiùs expendere voluiſſent; exempla ſunt, & antiqua in Conone ſupra laudato, quem inter ingenioſiſſima inventa ſua, Geometris abſque demonſtratione propoſita, quædam complexum fuiſſe, quæ falſa erant, teſtis eſt idem Archimedes *loc. citat.* & recentia non deſunt in Mathematicorum lectione verſatis, quæ hìc referre non vacat, & alibi indicata habes *cap.* 12. *n.* 10.

6 Sed eſto veriſſima omnia ſint, quæ à Geometris ſine demonſtratione proponuntur (ut certè indubia ſunt, quæ à Viviano, ab Hugenio, aliiſq; ſummis Viris propoſita habemus, neq; id fas in controverſiam adducere

du-

ducere) quamdiù hìc ſubſiſtunt Geometræ, tamdiú revera *Puri Hiſtorici* munus obeunt; quiddam amplius Geometriæ titulis accedere par eſt, quàm nudam Hiſtoriæ laudem: utrumque Geometria munus habet, & vera proponere (quod Hiſtoriæ commune eſt) & eadem demonſtrare (qua ſingulari dote ab Hiſtoria diſcernitur, & ſummum humanæ Sapientiæ verticem meritò poſſidet) Hiſtoriæ ſufficit, ſi fidem pariat, Geometria, ſi evidentem præterea rerum abs ſe propoſitarum ſcientiam Lectorum mentibus non inducit, vix Geometriæ nomen, & ſpeciem ſervat. Non inutilis igitur operæ fuerit, à maximis ævi noſtri Geometris aſſerta demonſtrationibus ſuis communire, & quod illis, vel temporis, vel opportunitatis defectus invidit, ſupplere, quemadmodum pro viribus exequi, tum in antecedenti, tum in hoc noſtro Opuſculo conati ſumus; Præſertim cùm ea occaſione tam generales Tangentium, Quadraturarũ, ac Dimenſionum methodos aperire, Tibique, Mi Lector, explanare licuerit, in quibus quid profecerim, quid aliorum inventis addiderim, Tui ipſius judicio relictum eſto. Intereà, ſi hæc boni feceris, infinitis aliis, quæ adhuc, vel ſchedulis ſparſa, vel ordinatiùs diſpoſita premo, edendis animum dabis.

7 Antequàm tamen ad lectionem accedas, rogandus es, ut pauca quædam præli vitia corrigas, nequid deinceps offendas, quod attentioni tuæ moras injicere poſſit; non dico leviora quædam, quæ ad orthographiam ſpectant, ut cùm *pag.* 208 *lin.* 2. comma præfi-

xum

xum eſt verbo *altitudinis*, cui fuerat ſubnectendum; ſed alia duo majoris momenti, quæ ſenſum turbare poſſent, primum *pag.* 42. ubi *lin* 4. habetur *punctum V*, legendum eſt enim *punctum I*, & viceverſa *lin. ſeq.* ubi habetur *curvæ in u, I*, legendum *curvæ in u, V.* Alterũ *pag.* 162. ubi primo loco *Sturmium* numeratum mallem ante *Guarinum*, contra quàm factum ſit. Hoc fortaſſe nihili faciendum ipſe putabis; ego cur magnifaciam, cauſas habeo ſatis graves, certè hunc ordinem etiam in Epiſtola ad P. Cevam *num.* 16. obſervavi. In Figurarum præterea Schemmatibus quædam ſculptorum vitio, aut deficere, aut perperam efformata eſſe deprehendes, quorum præcipua ſuis locis opportunè indicata invenies, pleraque tamen Lectorum Humanitati, ac Benevolentiæ excuſanda remiſi, nec enim ipſe, alias inter ſollicitudines, aut omnibus notandis idoneus, aut corrigendis (prælo jam properante) ſufficiens fui: profectò, æquus ipſe cùm ſis, ea mihi nullatenus imputanda eſſe intelliges. Vale.

GUIDONIS GRANDI
MONACHI CAMALDULENSIS
In Piſana Academia Publ. Philoſ. Profeſſoris

GEOMETRICA DEMONSTRATIO
THEOREMATUM HUGENIANORUM
CIRCA LOGISTICAM, SEU LOGARITHMICAM LINEAM.

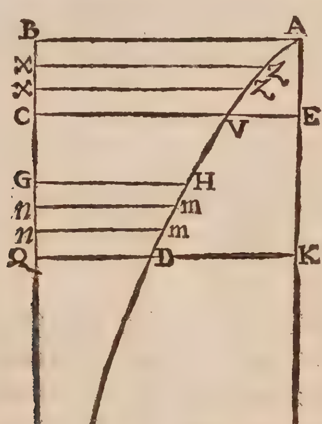
CAPUT I.

Logiſticæ, ſeu Logarithmicæ deſcriptio. Ejus primaria proprietas. Logiſticæ aliorum graduum. Ejuſdem per duos motus generatio. Axem habet pro Aſymptoto. Tam ſupra, quàm infra in infinitum continuari poteſt. Alio duplici motu deſcribitur. Spiralis Logarithmicæ per duos motus deſcriptio. Ejus primaria affectio. Ad alios gradus extendi poteſt. Centro per infinitos cincinnos circumvolvitur, licèt longitudine finita ſit. Æquè inclinatur cuilibet radio. Gravia per ipſam

delata eodem ſemper momento pollent, reſpectu momenti, quod haberent in perpendiculo, Carteſio etiam id primùm obſervante. Per convolutionem primæ Logiſticæ gigni poteſt. Fallax, ex nonnullorum methodo, ratiocinium circa ejus ſpatii dimenſionem.

1 RECta methodus poſtulat, ut, antequam ad demonſtrandas, quas Hugenius propoſuit, Logiſticæ proprietates accedamus, illius geneſis, & deſcriptio præmittatur; imò & variis modis idem præſtare non inutilis operæ pretium fuerit, inde ſiquidem non ſolùm primariæ ejuſdem affectiones, ex quibus aliæ pendent, ſponte ſua profluere intelligentur, verùm etiam ad eorum, quæ deinceps dicenda ſunt, intelligentiam haud parùm conducet clara, & diſtincta ejus naturæ notio per ejuſmodi varias generationes Lectorum mentibus faciliùs indita, atque altiùs infixa.

2 Logiſtica igitur, ſeu Logarithmica linea illa eſt, in qua ordinatæ ad æquales axis partes ſunt geometricè proportiona-



les; nempè diviſo axe BQ in quotlibet partes æquales BC, CG, GQ, &c. ſi ad earumdem terminos ordinatæ BA,

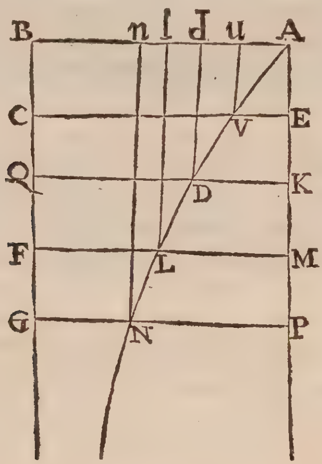
CV,

CV, GH, QD, &c. fuerint continuè proportionales, quæ per puncta A, V, H, D, (aliaque extrema z z, m m, mediarum proportionalium æquo ſemper intervallo duabus quibuslibet ordinatis interponendarum) tranſit linea, *Logiſtica*, ſeu *Logarithmica* appellari conſuevit, eò quòd inveniendis logarithmis inſerviat, uti ex ſequentibus manifeſtum erit.

3 Ex hac enim definitione conſtat, partes axis ita correſpõdere ordinatis, quemadmodum Logarithmi reſpondent naturalibus numeris, & quòd ratio quarumlibet duarum ordinatarum, veluti BA ad CV, reſpectu rationis ordinatarum BA ad QD in eadem proportione erit, in qua axis partes CB, & QB per has ordinatas abſciſſæ; ſiquidem, æqualiter creſcente axe, perinde æqualiter creſcit ordinatarum proportio, unde quàm multiplex eſt QB ipſius BC, tam multiplex pariter eſt ratio duarum BA, QD, rationis duarum BA, CV; & generaliter, rationes, quas invicem habent duo quælibet ordinatarum paria (etiamſi una pro communi antecedente, aut conſequente non ſumatut, ſed comparetur verbi gratia ratio duarum BA, CV, cum ratione, quæ eſt inter duas GH, QD) erunt ad invicem, ut partes axis quolibet ordinatarum pari interceptæ, uti ad ipſam curvæ hujus naturam attendendo, vel ſumptis, tùm rationum illarum, tum axis partium æquè multiplicibus, facilè conſtare poteſt; atque hæc erit primaria Logiſticæ proprietas, per quam poterit expreſſiùs definiri, ejuſq; natura clariùs determinari.

4 Ubi obiter animadvertendum erit, poſſe aliorum etiam graduum Logiſticas excogitari, ſi videlicet rationes ordinatarum BA ad CV, & BA ad QD jam non forent ut partes axis BC, & BQ, ſed ut earumdem BC, & BQ quadrata, vel cubi, aliæve poteſtates, vel etiam radices quadratæ, vel cubicæ, aliorumve graduum, ſive in ratione axis partium, ut libuerit multiplicata, vel ſubmultiplicata; adde & ſeſquialtera, vel ſeſquitertia, &c. quas quidem Logiſticarum ſpecies hoc loco minimè conſiderandas ſuſcipimus; neque verò id aut ſuſceptæ exercitationis inſtitutum poſtulat, aut temporis etiam ratio permittit, ſed de prima, & ſimpliciſſima dumtaxat, quam ſuprà deſcripſimus, ſpecie erit hìc nobis cum Cl. Hugenio tractandum.

5 Porrò quum proportionalium differentiæ ſint in eadem ratione proportionales, manifeſtum eſt, ipſas A u, u d, d l, l n, &c. interceptas axi parallelis V u, D d, L l, N n æqualiter creſcentibus, fore in continua proportione earumdem ordinatarum; quare hæc linea, uti primus Logarithmorum Inventor Neperus delineare aggreſſus eſt, deſcribi intelligetur duplici motu, altero lineæ A B per B F æquabiliter, ſibique æquidiſtanter deſcendentis, altero puncti A motu continuè retardato versùs B delati, itaut ſpatia æqualibus quibuſcumque temporibus ſubinde tranſacta in eadem geometrica ratione



decreſcant; quomodo quo tempore linea deſcendens confecerit ſpatium B C, & ſitum C E obtinuerit, ſi punctum A venerit in u, jamque in puncto V reperiatur, ſequenti tempore æquali, linea per æqualem axis portionem C Q delapſa, & in Q K poſita, punctum A translatum eſſe in d, ſpatio u d tranſacto, adeòque in ſitu D reperiri concipiendum eſt, ſequenti adhuc tempore, quo linea percurrerit ſpatium Q F, & in F M collocata ſit, punctum ex d in l promotum, atque in ipſo L puncto conſiſtere intelligetur, ſpatiis A u, ud, d l, cæteriſq; deinceps decreſcentibus in ratione B A ad C V; evidens

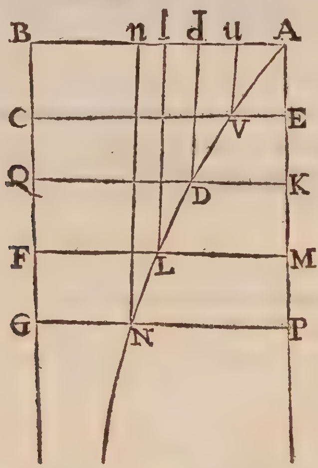
dens enim eſt motum ex utroque compoſitum fore in eadem curva A V D L N, quam priùs determinavimus.

6 Cæterùm conſtat curvam A V N hac motuum compoſitione deſcriptam axi B F continuò propriorem fieri, prout punctum A versùs B ſemper fluere, & ad ipſum accedere intelligitur, nec tamen evenire poſſe aliquando, ut cum ipſo axe conveniat, uno verbo, axem ipſi Logiſticæ *Aſymptoton* eſſe, quia creſcente in infinitum axe B F per additionem æqualium partium, alia, & alia ſpatia multitudine infinita, ſemperque minora, & minora ipſi puncto A percurrenda remanent, antequam ad ipſum B perveniat, quod ideò numquam attingere poterit: ſeriei ſiquidem infinitæ A u, u d, d l, &c. in ratione A B ad C V, vel B u continuatæ ultimus terminus eſt punctum B, eò quòd, quum ſit A B ad B u, ut A u ad u d, erit etiam A B ad priorum duarum differentiam A u, ut A u ad differentiam duarum poſteriorum A u, u d; quare ex doctrina Progreſſionum Geometricarum, quam poſt Archimedis veſtigia in Libro de dimenſione parabolæ, primus recentiorum Torricellius idem argumentum tractans lemm. 27. & Cavallerius in ejuſdem Scholio apud ipſum demonſtrarunt, mox Gregorius à S. Vincentio, aliique deinceps fuſiùs illuſtrarunt, erit ipſa A B ſumma progreſsionis terminorum A u, u d, d l, &c. in dicta ratione continua decreſcentium; nec vacat id particulariùs demonſtrare, quum vel ex ipſa prima deſcriptione curvæ *num.* 2. adducta ſimpliciùs longè innoteſcat hæc ipſa Logiſticæ affectio, quòd ſcilicet ad axem tanquam aſymptota propiùs accedat, quàm quodlibet datum intervallum, nec tamen cum ipſo conveniat; continuatio quippe rationis A B ad C V per minores, ac minores terminos in infinitum fieri poteſt, quin umquam minimus ejuſmodi terminorum reperiatur, aut aliquis omnium ultimus fingi queat.

7 Sed & eadem ratione liquet, Logiſticam D V A in immenſum ſupra ipſam B A continuari poſſe, nec umquam ad certum aliquod curvæ hujus initium, ac veluti verticem, ſupremumque ejus punctorum fontem perveniri, ſed varia dumtaxat ejus ſegmenta per ordinatarum aliquam, veluti A B, vel C V abſciſſa exhiberi, nec magis punctum A, quàm V, vel D,

aut

aut aliud quodvis pro Logiſticæ capite ſtatui poſſe : unde & perinde eſſe undecumque incipias, ratio enim ordinatarum B A, & C V tam benè ad majores terminos, quàm ad minores continuari poteſt, & ideò applicatis infinitis ejuſmodi terminis ſucceſſivè majoribus, & ſupra B A in immenſum creſcentibus, ad partes ipſius axis F B, ultra B producti, longitudine æquales prioribus B C, C Q &c. itaut per ordinem arithmeticè creſcant axis portiones, geometricè creſcentibus ordinatis, eadem curva ad ſuperiores partes in immenſum continuabitur per applicatas datam quamlibet magnitudinem excedentes, non minùs quàm ad inferiores in infinitum produci queat per applicatas qualibet magnitudine data minores.



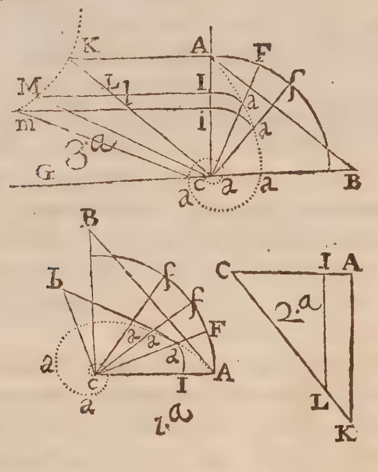
8 Illud etiam intereà animadvertiſſe juvabit, duplici alio motu eamdem curvam intelligi poſſe deſcriptam, ſi videlicet imaginemur, puncto A per A P æquabiliter deſcendente, (vel muſca, aut formica per haſtam A P ſimiliter æquabili motu delata, ut & P. de Chales in logarithmis tradendis ſupponit) ipſam interim A P, lineæ B A perpendiculariter inſiſtentem, ſibi æquidiſtanter versùs B promoveri, ac ſubinde in u V, d D, l L, &c. reperiri, ſpatiis A u, u d, d l, &c. in eadem ratione ge-

geometrica decreſcentibus, prout arithmeticè creſcunt ſpatia AE, AK, AM, &c. à puncto æquabiliter deſcendente percurſa; ſic enim punctum A ſubinde reperietur in punctis V, D, L, N, &c. reſque eodem recidere obſervabitur, ſi ad ſuperiùs dicta *num.* 5. attendamus, unde ulterioris explicationis moleſtiæ parcendum erit: quemadmodum & ejuſdem tædii compendio conſulentes miſſam facere decrevimus (myſterii pleniſſimam) eorumdem motuum inverſam compoſitionem, qualis haberetur, ſi axis B F ab ipſa tota æternitate motu infinitè tardo per B A motus intelligeretur, ita tamen accelerato celeritatis gradu, ut integra ſpatia, quæ in fine æqualis cujuſcumque temporis particulæ tranſacta forent, veluti B n, B l, B d, Bu, B A eſſent in continua proportione geometrica, puncto aliquo intereà æquabiliter aſcendente per eumdem axem B F, itaut poſt emenſum infinito tempore infinitum ſpatium infra G poſitum ſubinde æqualibus tēporibus ad G F Q C B aſcenderet, perque hanc motuum compoſitionem reperiretur ex ordine in N L D V A; aut ſi æquabilis motus ab æterno inchoatus refunderetur in lineam G P versùs B A aſcendentem, acceleratus verò in punctum G, vel B per eamdem lineam versùs P, vel A promoti, itaut quolibet æquali tempore ſpatia percurreret geometricè proportionalia majora, ac majora n l, l d, d u, u A poſt emenſos ſimiliter motu infinite tardo in tota æternitate ſingulos minores, ac minores ejuſdem progreſſionis terminos per ordinem acceptos, itaut ſubinde in iiſdem punctis N L D V A reperiatur, &c.

9 Aliud potius Logiſticæ, ſeu Logarithmicæ lineæ genus, de quo infra nonnulla dicenda recurrent, exponere hac occaſione non gravabor. Illa ad modum ſpiralis cujuſdam generari intelligitur, radio circuli per circumferentiam æquabiliter moto, dum punctum quoddam ab extremo radii versùs centrum motu in geometrica proportione retardato procurrit, ita ut quidquid præſtat axis Logiſticæ B F in curva ſuperiùs expoſita, id in ſpirali, de qua loquimur, præſtet circuli peripheria in arcus æquales diviſa; quod verò præſtabant ibi ordinatæ B A, C V, Q D, &c. geometricè proportionales, id in præſenti efficiant radii à centro ad hujus ſpiralis puncta exporrecti.

cti. Itaque in hujus diagrammatis fig. 1. vel 3. expoſito quovis circulo C A F f, determinatiſque quotlibet æqualibus arcubus A F, F f, f f, ponantur radiorum correſpondentium portiones C A, C a, C a geometricè proportionales; erunt puncta A, a, a, in curva *Spirali Logiſtica*, aliis *Spiralis Logarithmicæ*, quibuſdam *Spiralis Geometricæ* nomine appellata, quæ pariter ad infinitos gradus extendi poſſet, ſi fingerentur radiorum ejus rationes non tantùm in ſimplici, ſed & in multiplicata, aut ſubmultiplicata qualibet arcuum abſciſſorum ratione creſcere, prorſus ut de prima Logiſtica dictum eſt ſuprà *num.* 4. ſed enim in prima hujus ſpiralis ſimpliciſſima ſpecie ſiſtimus, nec aliis pronunc implicamur.

10 Et quidem hìc pariter, ſi radii C A, C a ſint ut numeri, arcus reſpondentes F A, f A erunt ut Logarithmi, eritq; pri-

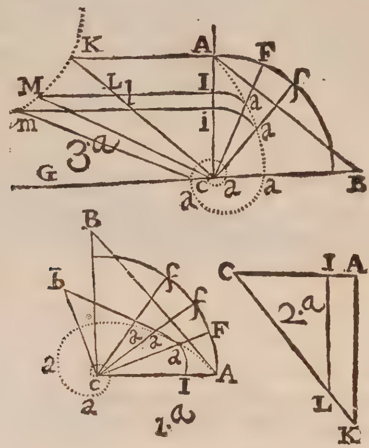


ma hujus curvæ affectio, quòd ratio duorum quorumlibet radiorum ad rationem duorum quorumlibet aliorum ſit, ut nuper indicavimus, in eadem proportione, in qua ſunt arcus binis quibuslibet radiis intercepti, prorſus ut de rationibus ordinatarum, deq; partibus axis in prima Logiſtica acceptis ſupra dicebatur *n.* 3. Unde & conſtat Spiralem Logiſticam utrinq; pariter in infinitum continuari poſſe, tum ad majores, tum ad mino-

nores terminos continuata ratione radiorum creſcentium, aut decreſcentium circa centrum, circa quod per infinitos cincinnos hæc curva convolvetur, prout infinities repetentur arcus æquales, per quos diſtare debent radii illi proportionales, adeòque integræ circulationes numero infinitæ ſibi invicem ſuperponentur, centro intereà reſpectu curvæ quaſi aſymptoto ſeſe habente, quippe ad illud magis, magiſque accedent curvæ puncta intervallo minore quolibet dato, prout diminuentur proportionaliter radii, nec aliquando tamen in ipſum centrum deſinent, quum ad minimum horum terminorum perveniri nõ poſſit: quæ res, ut patebit, curioſa contemplatione non vacat, (non minùs quàm ſi motuum, quibus deſcribitur compoſitionem inversè conſideres eo modo, quo in prima Logiſtica fieri poſſe jndicavimus ſub finem *num.* 8.) manifeſtum eſt enim, totam, quanta eſſe poſſit, hujuſmodi curvam per infinitos cincinnos infinitè multiplici gyro ſe circa centrum convolvẽtem, determinatæ rectæ lineæ longitudinem minimè excedere, longitudinem ſcilicet ſuæ tangentis A B uſq; ad radio perpendicularem ex centro excitatam productæ; quod & ab aliis pridem obſervatum video, facilemque habet demonſtrationem ex infra dicendis, *cap.* 5. *num.* 10.

11 Sed & illud per ſe propemodùm conſtat, atque ex præmiſſa hujus ſpiralis geneſi ſponte profluit, radios ad quodlibet ipſius curvæ punctum æquè inclinari, itaut conſtans, certus, & determinatus ſemper ſit angulus C a A, quem quilibet radius cum curva ad eaſdem partes conſtituit; ſiquidem hoc ſpirali ſpatio in triangula infinitè parva æqualium ad centrum angulorum diſtributo, veluti ſe habent A C a, a C a, &c. conſtat illa ſimilia fore, propter latera circa æquales angulos proportionalia, quapropter & alii anguli homologi æquales erunt; itaque ſi ponatur, punctum C eſſe Terræ centrum, in quod gravia collimant, quæratur autem curva (in ſuppoſitione perpendicularium, ſeu linearum directionis, non æquidiſtantium, ut phyſicè ſumi ſolent, ſed in centrum convergentium, uti revera eſſe cenſentur) in qua grave poſitum, & per quam delapſum, idem in quolibet puncto momentum retineat, reſpectu momenti, quod habet in perpendiculo, ita ut illud ad hoc

(ubicumque conſiderentur) eamdem ſemper determinatam rationem obtineat, ea certè non alia eſſe poterit, quàm Spiralis hæc Logarithmica, cujus inclinatio ad radios a C (exprimentes veram gravium directionem, veraque perpendicula, in quibus momentum maximum, ſeu totale exercetur) num-

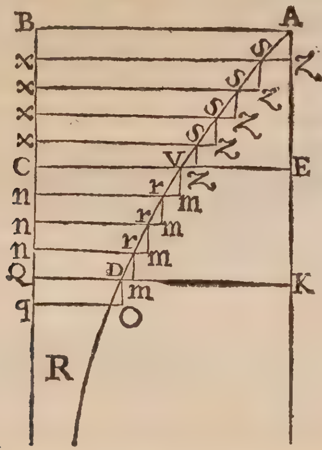


quam immutatur, ſed ſemper eadem perſeverat, contra quàm faciat recta quælibet, velut A B, exhibens planum aliquod inclinatum, in quo poſitum grave (juxta rigorem geometricum perpendiculorum convergentium) non idem in quolibet puncto momentum habere poteſt, nec eadem ſemper eſſe hujus momenti ratio ad momentum in perpendiculo [ut ut id re ipſa à Mechanicis ſapienter aſſumatur, quippe in tanta à centro diſtantia perpendicula quaſi parallela habentur, aut rectæ illius portio cum Logiſticæ Spiralis portione reipſa coincidit]ob varium inclinationis angulum ubique inconſtantem, quem diverſa ejuſdem rectæ puncta cum centro conjuncta conſtituunt, unde & momentum ad ſingula ferè puncta in rigore variari continget.

Poſt hæc autem ſcripta inveni & Celeberrimum Carteſium par. 1. Epiſtolar. ep. 73. Merſenno jam indicaſſe lineam,in qua momenta non variantur,eſſe quamdam ſpiralem, rogatumque ut

ut ejus naturam indicaret, repoſuiſſe epiſt. ſequ. eam talem eſſe, ut ejus tangentes ſint ad radios ubique æqualiter inclinatæ, & curvæ portiones radiis illas abſcindentibus eſſe proportionales; quod re ipſa Logiſticæ, ſeu Geometricæ Spirali convenit, ut monuimus.

12 Hæc eadem porrò Spiralis Logiſtica intelligi etiam poſſet deſcribi per convolutionem primæ Logiſticæ, de qua ſupra loquuti ſumus, toto axe B Q in punctum centri contracto,



ipſa verò A K in peripheriam circularem radii B A (repetito, ut opus fuerit, circumvolutionis gyro) curvata, ſingulisque ejus æqualibus partibus in pares arcus contortis, ordinatis intereà B A, C V, Q D in totidem radios à centro deductos abeuntibus, atque à paralleliſmo ad convergentiam in idem centrum translatis; uti viceversà primam Logiſticam per evolutionem hujus ſpiralis, rectificata circuli peripheria, & radiis ſeſe explicantibus, atque ad parallelum ſitum redeuntibus conformari quis concipere poſſet. Cave autem putes Logiſticam in Spiralem contractam ſpatium continere dimidium ejus, quod explicata complectebatur, eò quòd infinitè parva parallelogramma B z, x z, &c. ex quibus illa evoluta conſtabat, in totidem abeant triangula parallelogrammorum

dimidia, ex quibus Spiralis Logiſticæ ſpatium abſolvitur. Ejuſmodi enim ratiocinium (ut ut celebrium Geometrarum methodo conforme) plerumque fallax eſſe deprehenditur, quia non eadem retinetur in convolutione dictorum triangulorum altitudo, quæ priùs fuerat parallelogrammorum, (quamquàm in certa ratione ſemper varietur) utì nec eadem baſis, quæ enim priùs Curva Logiſtica infinita erat, in Spiralem Logiſticam longitudine finitam convertitur; Unde circa Spiralis hujus Logiſtici Spatii dimenſionem ea dumtaxat ſunt attendenda, quæ infra *cap.7.n.*13. ex evidentioribus principiis generaliter deducemus. Atque hæc intereà, ad ingenerandam Tyronibus Logiſticæ lineæ, de qua deinceps agendum erit, notitiam, prælibaſse ſufficiat.

Nunc quæ ſint nobis ad mentem Hugenii demonſtranda, allatis Clariſſ. Auctoris verbis, breviter indicabimus.

CA-

CAPUT II.

Logiſticæ proprietates ab Hugenio propoſitæ. Spatiorum, ſive ad axem, ſive ad ejus parallelam ordinatis interiectorum, tum ad invicem, tum ad infinitum reliquum Logiſticæ ſpatium proportio. Subtangentis longitudo ſemper eadem, & quæ. Trilineorum Logiſticæ proportio. Infinitum Logiſticæ ſpatium, cujus trianguli duplum. Cui rectangulo æqualia reliqua ſpatia. Solida ex infinito ſpatio Logiſticæ circa axem, vel circa ordinatam revoluto, quam proportionem habeant ad conos inſcriptos. Centrum gravitatis Spatii Logiſtici, in qua ab axe, & ab ordinatis diſtantia. Prædictorum ſolidorum gravitatis centra determinantur. Quomodo Logiſtica hyperbolæ tetragoniſmo conducat, & quam proportionem habeant hyperbolica ſpatia ad parallelogrammum quodlibet aſymptotis inſcriptum.

IPſis Clariſſimi Authoris verbis latinè redditis, Logiſticæ proprietates referre placet, prout idem ipſe nobis illas propoſitas voluit ad calcem ſuæ Diatribæ de *Cauſa Gravitatis*, ubi ſic habet.

Les proprietez de la Ligne Logiſtique, que i' ay promis de raporter, & dont quelques unes ont ſervi à trouver ce que i' ay remarque' touchant les movemens à travers l' air, ſont les ſuvivantes; outre la premiere, que i' ay deſia indiquèe, de la

Proprietates Lineæ Logiſticæ, quas referre promiſimus, & quarum nonnullæ iis inveſtigandis deſervierunt, quæ circa gravium motus per aerem ſuperiùs adnotavimus, ſequentes ſunt; præter jam indicatam, proportionalitatis

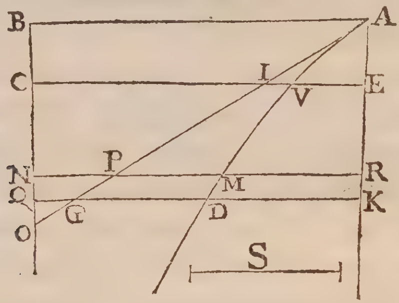
or-

proportionalitè des ordonnèes à l' aſymptote, quand elles ſont egalement diſtãtes, par la quelle ont trouve des points dans cette ligne.

ordinatarum ad aſymptoton, quando æqualiter diſtãt, cujus beneficio plura hujus lineæ puncta reperiri poſſunt.

1 *Que les eſpaces compris entre deux ordonnèes à l'aſymptote, ſont entre eux comme les differences de ces ordonnèes. Ainſi dans cette figure, ou AVD eſt la Logiſtique, BO*

1 Quòd ſpatia comprehenſa inter duas ad aſymptoton ordinatas ſunt inter ſe, ut earumdem ordinatarum differentiæ. Sic in præſenti figura, ubi AVD Logiſtica eſt, BO



ſon Aſymptote, & les ordonnèes AB, VC, DQ, dont ces dernieres, eſtant continuèes rẽcontrent AK parallele à l'Aſymptote en E, K; les eſpaces ABCV, ABQD, ſont entre eux, comme les droites EV, KD.

ejuſdem Aſymptotos, & ordinatæ AB, VC, DQ, quarũ duæ poſtremæ continuatæ cõveniunt cum AK ipſi Aſymptoto parallela in E, K; ſpatia ABCV, ABQD ſunt inter ſe, ut rectæ EV, KD.

2 *Que les meſmes choſes eſtant posèes, & AO eſtant la tangente au point A, la quelle coupe CE, QK, en I, & G; les eſpaces AVE, ADK ſont entre eux, comme les droites VI, DG.*

2 Quòd iiſdem poſitis, & AO curvam tangente ad punctum A, quæ ſecet ipſas CE, QK in I, & G; ſpatia AVE, ADK inter ſe ſunt, ut rectæ VI, DG.

3 Quod

3 *Que l'eſpace compris entre deux ordonnèes, eſt à l'eſpace infini, qui, depuis la moindre de ces ordonnèes, s'etend entre la Logiſtique, & ſon Aſymptote, comme la difference des meſmes ordonnèes eſt à la moindre. Quand ie dis, que l'eſpace infini à une certaine raiſon à un eſpace fini, cela ſignifie qu'il aproche ſi près de la grandeur d'un eſpace donnè, qui à cette proportion à l'eſpace fini, que la difference peut devenir moindre qu'aucun eſpace donnè. Dans la figure precedente l'eſpace A B Q D eſt à l'eſpace infini, qui depuis D Q s'ètend entre la courbe, & l'aſymptote, comme KD à D Q.*

3 Quòd ſpatium duabus ordinatis interjectum eſt ad infinitum ſpatium, quod poſt minorem harum ordinatarum exporrigitur inter Logiſticã, & ejus Aſymptoton, ut differentia earumdem ordinatarũ eſt ad minorem. Quum porrò dicimus infinitum ſpatium ad quoddam finitum in quadam ratione eſſe, hoc unum intelligendum volumus, tam proximè illud accedere ad datum ſpatium, quod finito illi ſpatio in dicta ratione reſpondeat, ut differentia minor evadere poſſit qualibet magnitudine data. In præcedenti figura ſpatium A B Q D eſt ad infinitum ſpatium, quod poſt Q D, curvæ, & aſymptoto interiicitur, ut K D ad D Q.

4 *Que la ſoutangente, comme B O dans la meſme figure, eſt tousiours d'une meſme longueur, à quelque point de la Logiſtique que la tangente apartiene.*

4 Quòd ſubtangens, velut B O in eadem figura, ejuſdem ſemper eſt longitudinis, ad quodcumque Logiſticæ punctum tangens pertineat.

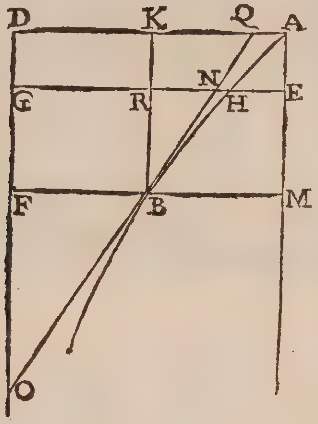
5 *Que cette longueur ſe trouve per aproximation, & qu'elle eſt à la partie de l'aſymptote, compriſe entre les ordonnèes de la raiſon double, cõme* 434294481903251804 *à* 301039995663981195; *ou bien pres, comme* 13 *à* 9.

5 Quod hæc longitudo per aproximationem reperitur, eſtque ad partem aſymptoti interceptam ordinatis duplæ proportionis, ut 434294481903251804 ad 301039995663981195, ſeu proximè, ut 13 ad 9.

6

6 Que s'il y a trois ordonnèes, comme dans cette figure ſont AD, HG, BF, & que du point de la courbe, apartenant à la moïdre, on mene une parallele à l'aſymptote, qui coupe les deux autres ordonnèes en R, & K, & une tangente B Q, qui les coupe en N, & Q; les eſpaces trilignes A B K, HBR ſont entre eux, comme les parties des ordonnèes entre la courbe, & la tangente, ſcavoir comme A Q, HN.

6 Quòd ſi fuerint tres ordinatæ, velut in hac figura ſe habent AD, HG, BF, & ex puncto curvæ ad minimam pertinente ducatur aſymptoto parallela, ſecans duas alias ordinatas in R, & K, ac tangens BQ eaſdem ſecans in N, & Q; ſpatia trilinearia ABK, HBR ſunt inter ſe, ut partes ordinatarum inter curvam, & tangentem, ſcilicet ut AQ, HN.



7 Que l'eſpace infini entre une ordonnèe, la Logiſtique, & ſon Aſymptote du coſte, que ces deux dernieres vont en s'approchant, eſt double du triangle, que font l'ordonnèe, la tangente menèe du meſme point que

7 Quòd ſpatium infinitum inter ordinatam, Logiſticam, & aſymptoton, qua parte hæ ad invicem accedunt, duplum eſt trianguli comprehenſi ordinata, tangente ad idem ordinatæ punctum, ac ſubtangen-

gen-

l'ordonnèe, & la ſoutangente. Ainſi, dans la meſme figure, l'eſpace infini, depuis l'ordonnèe B F, eſt double du triangle B F O.

8 *Que l'eſpace, compris entre deux ordonnèes, eſt ègal au rectangle de la ſoutangente, & de la difference des meſmes ordonnèes. Ainſi, dans la meſme figure, l'eſpace A D F B eſt egal au rectangle de la ſoutangente F O, & de K A.*

9 *Que le ſolide que fait l'eſpace infini depuis une ordonnèe, en tournant autour de l'aſymptote, eſt ſeſquialtere du Cone, dont la hauteur eſt egale à la ſoutangente, & le demidiametre de la baſe egal à la meſme ordonnèe. Ainſi le ſolide que fait l'eſpace infini B F O C, en tournant autour de F O, eſt ſeſquialtere du Cone que fait le triangle B F O en tournant autour de le meſme F O.*

10 *Que le ſolide produit par le meſme eſpace infini, en tournant autour de l'ordonnèe B F, depuis laquelle il commence, eſt ſextuple du Cone, que fait le triangle B F O, par ſa converſion ſur B F. De laquelle meſure des ſolides il s'enſuit.*

11 *Que le centre de gravitè de l'eſpace infini, depuis une or-*

gente. Sic in eadem figurâ ſpatium infinitum poſt ordinatam B F duplum eſt trianguli B F O.

8 Quòd ſpatium duabus ordinatis interjectum æquale eſt rectangulo ſubtangentis in differentiam earumdem ordinatarum; ſic in eadem figura ſpatium A D F B æquatur rectangulo ſubtangentis F O in K A.

9 Quòd ſolidum productũ ab infinito ſpatio poſt aliquam ordinatarum in converſione circa aſymptoton, eſt ſeſquialterum Coni, cujus altitudo æquetur ſubtangenti, baſis verò ſemidiameter ordinatæ par fuerit. Ita ſolidum genitũ ab infinito ſpatio B F O C in converſione circa F O ſeſquialterum eſt Coni geniti ex triangulo B F O circa eamdẽ F O revoluto.

10 Quòd ſolidũ productum ab eodem infinito ſpatio in converſione circa ordinatam B F, poſt quam exporrigitur, ſextuplum eſt Coni geniti ex triangulo B F O in converſione circa B F. Ex qua quidem ſolidorum menſura conſequitur.

11 Quòd centrum gravitatis infiniti ſpatii poſt unam

donnèe, eſt diſtant de cette ordonnèe, de la longueur de la ſoutangente.

12 *Que ce meſme centre de gravitè eſt diſtant de l'aſymptote, du quart de l'ordonnèe.*

13 *J'avois auſſi trouvè, que le centre de gravitè du premier des dits ſolides infinis, eſt diſtant de ſa baſe, de la moitiè de la ſoutangente.*

14 *Et que le centre de gravitè de l'autre ſolide eſt diſtant de ſa baſe infinie, d'une huitième de ſon axe.*

15 *On ſcait aſſez, que cette ligne Logiſtique ſert à la Quadrature de l'Hyperbole, depuis*

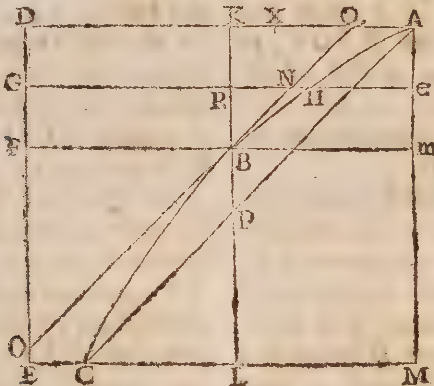
ordinatarum, diſtat ab hac ordinata longitudine ſubtangentis.

12 Quòd idem gravitatis centrum diſtat ab aſymptoto per quadrantem ordinatæ.

13 Reperimus etiam, quòd centrum gravitatis primi ex dictis ſolidis infinitis diſtat à ſua baſi per ſemiſſem ſubtangentis.

14 Et quòd centrum gravitatis alterius ſolidi diſtat ab ejus infinita baſi per octantem ſui axis.

15 Notum jam eſt, hanc Logiſticam lineam Tetragoniſmo Hyperbolæ deſervire



les demonſtrations du P. Gregoire de Saint Vincent, touchant les eſpaces Hyperboliques com-

poſt demonſtrationes P. Gregorii à S. Vincentio circa Hyperbolica ſpatia duabus ad al-

pris entre deux ordonnèes ſur une des aſymptotes. Et que s'il y a deux tels eſpaces, dont les ordonnèes de l'un ſoient comme A D à H G dans la derniere figure, & les ordonnès de l'autre comme B F à C E; ces eſpaces ſeront entre eux comme les lignes D G à F E. Mais on n'a point remarque, que je ſcache, que ces meſmes eſpaces Hyperboliques ſont au Parallelogramme de l'Hyperbole (j'appelle ainſi le parallelogramme dont les coſtez ſont les deux ordonnèes ſur les aſymptotes, tirèes d'un meſme point de la Section) comme chacune des lignes D G, F E, à la ſoutangente F O. De ſorte que, ſi le Parallelogramme de l'Hyperbole eſt ſupposè de o, 4342944819 parties, chaque eſpace Hyperbolique, compris entre deux ordonnèes à une des aſymptotes, ſera à ce parallelogramme, comme le Logarithme de la proportion des meſmes ordonnèes, c'eſt à dire comme la difference des Logarithmes, des nombres qui expriment la proportion des ordonnèes, au nombre o, 4342944819; en prenant des Logarithmes de 10 characteres outre la characteriſtique.

Et d'icy il eſt aisè de verifier la Quadrature de l'Hyperbole

teram aſymptoton ordinatis interjecta; quòdq; ſi duo fuerint hujuſmodi ſpatia, in quibus ordinatæ unius ſint, ut A D ad H G in poſtrema figura, & ordinatæ alterius, ut B F ad C E, hæc ſpatia erunt inter ſe, ut lineæ D G, & F E. Nondum autem, quod ſciam, innotuit, hæc ipſa ſpatia hyperbolica eſſe ad parallelogrāmum hyperbolæ (ſic voco parallelogrammum, cujus latera ſint duæ ad utramque aſymptoton ordinatæ ex eodē puncto Sectionis ductæ) ut unaquæq; linearum D G, F E eſt ad ſubtangentem F O. Adeò ut, ſi parallelogrammum hyperbolæ ſuponatur partium o, 4342944819, quodlibet hyperbolicum ſpatium duabus ad alteram aſymptoton ordinatis interjectum erit ad hoc parallelogrammum, ut Logarithmus proportionis earumdem ordinatarum, videlicet ut differentia Logarithmorū reſpondentium numeris exprimentibus proportionē ordinatarum, ad numerum o, 4342944819; acceptis Logarithmis decem notarum ultra caracteriſticam.

Atque hinc facile eſt veritatem oſtēdere Tetragoniſmi

 Hy-

que j'ay donnèes dans le Traitè de l'Evolution des Lignes Courbes, qui eſt dans mon Horologium Oſcillatorium.

Hyperbolici abs me propoſiti in tractatu deEvolutioneCurvarum, quem *Horologio Oſcillatorio* inſertum invenies.

Hactenus Viri Clariſſimi æquè, ac Doctiſſimi Theoremata perinde nova, atque admirabilia; nunc ad eadem demonſtranda accedamus.

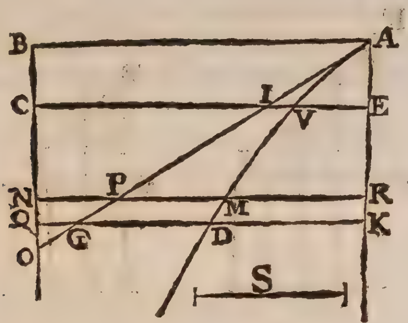
CAPUT III.

Primo Theoremate propoſito, oſtenditur aggregata quotlibet geometricè proportionalium à minimo eſſe inter ſe, ut differentiæ terminorum maximi, & minimi. Incommenſurabiles magnitudines per ablationẽ quantitatis minoris qualibet data reddi commenſurabiles. Hinc primi Theorematis Hugeniani demonſtratio more Archimedeo. Spatia Logiſticæ æquè alta ſunt inter ſe, ut homologæ ordinatæ, ſpatia quoque infinitè longa ſunt, ut baſes. Quodvis ſpatium ad ſubſequens infinitum eſt, ut differentia ſuarum ordinatarum ad minorem. Hinc ſecunda ejuſdem primi Theorematis demonſtratio.

3 A Primo igitur Theoremate Clariſſimi Hugenii auſpicantes rem ipſam propiùs attingamus. Illud, ut vidimus, eſt: *Quòd ſpatia comprehenſa inter duas ad aſymptoton ordinatas ſunt inter ſe, ut earumdem ordinatarum differentiæ. Sic in*

præ-

præſenti figura, ubi AVD Logiſtica eſt, BO ipſius aſymptotos, & ordinatæ AB, VC, DQ, quarum duæ poſtremæ continuatæ conveniunt cum AK ipſi aſymptoto parallela in E, K; ſpatia

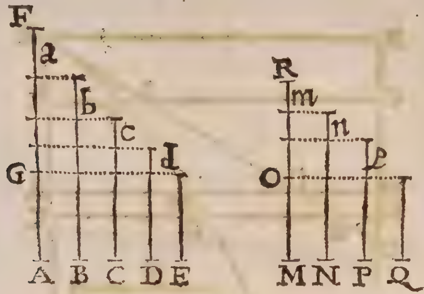


ABCV, ABQD ſunt inter ſe, ut rectæ EV, KD. Quod ut demonſtremus duo omnino ſunt præmittenda primæ demonſtrationi, alterum circa aggregata terminorum proportionalium, alterum de lineis incommenſurabilibus, quamquàm enim primum ex Torricellii flexilineis, ejuſve lemm. 28. de dimenſione parabolæ facilè deduci poteſt, ſecundum verò expreſsè à Cavalerio exercit. 6. prop. 24. demonſtratum fuerit, malui tamen demonſtrationes meas per extenſum afferre, ne Lector, libris illis fortè ad manum non occurrentibus, in horum Theorematum demonſtratione hæſitare poſſit, ſed ſolis Euclideis, Conicisve ad ſummùm elementis inſtructus, abſque alio ſubſidio, omnia inoffenſo pede percurrat; quod & aliàs infra obſervabimus, ſemel hìc monuiſſe ſufficiat.

2 Dico igitur primò, quòd, ſi fuerit duplex ſeries quotcumque terminorum in eadem ratione geometricè proportionalium, erit omnium aggregatum, minimo excepto, in prima ſerie, ad aggregatum omnium, pariter minimo excepto, in ſerie ſecunda, ut differentia maximi à minimo

pri-

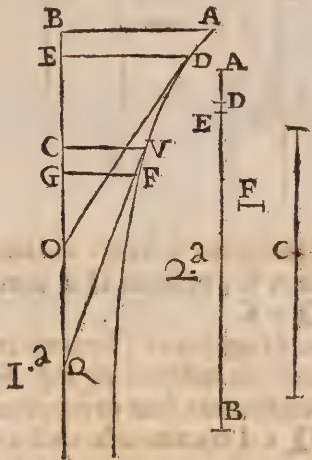
primæ ad differentiam maximi à minimo ſecundæ ſeriei. Sint enim magnitudines ejuſmodi in prima ſerie A,B,C,D,E, quarum maxima A, minima E, utriuſque differentia F G,



differentiæ autem ſingularum per ordinem à proximè minori ſint a, b, c, d, utique ſimul ſumptæ æquales ipſi F G extremarum. Sint pariter ſecundæ ſeriei magnitudines M,N,P,Q, quarum maxima M, minima Q, utriuſque differentia R O ſimiliter æqualis omnibus ſimul partialibus differentiis duarum quarumlibet ſibi ſuccedentium, quas notant litteræ m,n,p; ſintque in eadem ratione continuè proportionales tum quæ in prima ſerie, tum quæ in ſecunda reperiuntur. Dico A B C D ſimul ad M N P ſimul ſumptas eſſe, ut F G ad R O; cùm enim ſint A, B, C, D, E, continuè proportionales, erunt in eadem ratione proportionales earumdem differentiæ a, b, c, d; atque ut una A ad unam a, ita omnes A B C D ſimul ad totidem a b c d ſimul ſumptas, ideſt ad ipſam F G iis omnibus æqualem: eadem ratione oſtendetur, ut una M ad unam m, ita omnes M N P ad omnes m n p, ſive ad R O ipſis æqualem; eſt autem ut A ad a, ita M ad m, quoniam ſupponitur eſſe A ad B, ut M ad N; igitur ut A B C D ad F G, ita M N P ad R O, & alternando ut ſumma terminorum primæ ſeriei excepto ultimo ad ſummam terminorum poſterioris ultimo pariter excepto,

pto, ita F G differentia primi ab ultimo in prima ſerie ad R O differentiam primi ab ultimo in ſerie ſecunda. Q. e. d.

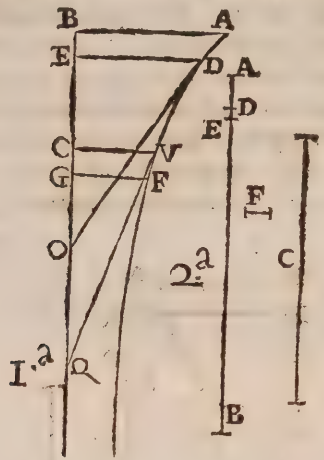
3 Dico ſecundò duarum incommenſurabilium magnitudinum majorem poſſe minori commenſurabilem reddi, ablata magnitudine minori qualibet data. Sunto enim in fig. 2. hujus diagrammatis duæ ejuſmodi quantitates incommenſurabiles, A B major, & C minor, quælibet autem magnitudo propoſita A E quantùmvis parva; dico poſſe ex majori A B auferri quantitatem, puta A D, minorem aſſignata A E, itaut reſiduum D B ſit jam ipſi C commenſurabile; nam bifariam



diviſa C, ac rurſus ſubdiviſa qualibet ejus medietate, patet fore ut jam deveniamus ad aliquam ejus partem F minorem data magnitudine A E: multiplicetur itaque F, quouſque fiat proximè major ipſa B E, & aggregatum ex F toties accepta ſit B D, patet B D minorem fore ipſa B A, quia B D ad ſummùm ſuperabit E B quantitate F, juxta conſtructionem, minori quàm ſit A E, aut plerumque nec integra quantitate F, ſed ejus aliqua portione multò magis minori ipſa A E; itaque B D minor eſt, quàm B A, defectu A D minori quàm ſit propoſita magnitudo A E; ſed & eadem B D ipſi C commenſura-

ra-

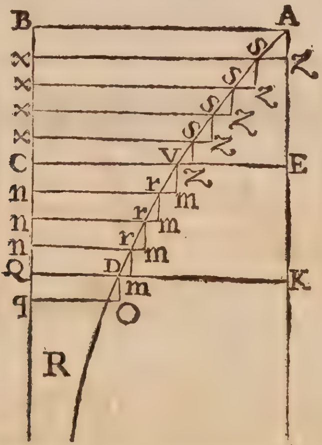
rabilis eſt, habens cum ipſa menſuram communem F, ex qua pluries repetita conſurgit; igitur ex majori A B duarũ in com-



mẽſurabilium magnitudinum facta eſt ablatio partis A D minoris data quantitate A E, reſidua D B jam commenſurabili ipſi C remanente. Q. e. f.

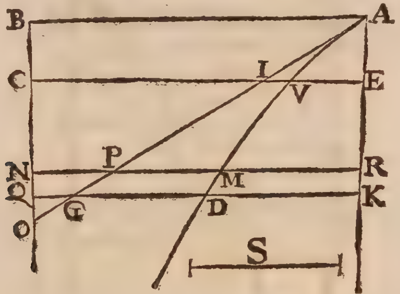
4 Jam libero pede Hugeniani Theorematis demonſtrationem Archimedeo more ſic inſtituo. *fig ſeq.* Spatiorũ A B C V, A B Q D (quæ demonſtranda ſunt invicem eſſe, ut V E, D K) altitudines B C, B Q vel commenſurabiles ſunt, vel incommenſurabiles. Sint primùm commenſurabiles, menſura B x utrique communiter inſerviente, diſtributoque axe B C, & reſiduo C Q in particulas ipſi B x æquales, ac ductis ordinatis, fiant parallelogrãma æquè alta B z, x z, &c. uſque ad C m circumſcripta ſpatio B C V A, quorum ultimum C m illi penitus extrinſecum remanet, continueturque eadem parallelogrammorum æquè altorum ſeries per reliquum ſpatium C V D Q, cui pariter circumſcripta ſint l m, n m, &c. uſque ad Q O, quod toti ſpatio extrinſecum pariter erit: At ſi menſura B x non ſatis ad propoſitum exigua fuerit, poterit illa, & ſequentes portiones ipſi æquales, bifariam dividi, ac rurſus bi-

biſariam, multiplicatis parallelogrammis hæc ſpatia circumſcribentibus, quòuſque excedant eadem ſpatia minori exceſſu quolibet dato, ſiquidem ille exceſſus minor ſemper erit primo parallelogrammo Bz, quod (diminuta ejus latitudine) minus eſſe poteſt quavis propoſita quantitate; erunt autem hæc parallelogramma æquè alta, ut baſes, nempe ut ordinatæ in Logiſtica paribus intervallis diſſitæ, adeòq; erunt, ex primaria Logiſticæ affectione *cap.* 1. *num.* 2. relata, in continua proportione, unde ex primo aſſumpto noſtro *num.* 2. hìc probato, aggregatum omnium parallelogrammorum circumſcriptorum ſpatio



ABCV, præter minimum toti ſpatio extrinſecum Cm, ad aggregatum omnium circumſcriptorum ſpatio ADQB, excluſo pariter minimo QO, erit ut differentia Bz à Cm, ſcilicet ut mVE, ad differentiam ejuſdem Bz à QO, ideſt ad ODK, atque adeò ut VE ad DK. Quoniam igitur ſeries parallelogrammorum ejuſmodi ſpatia circumſcribentiū ſemper, quantacumque fuerit ipſorum multitudo, & quantumcumque accedant ad ipſamet ſpatia, inveniuntur eſſe in ratione conſtanti VE ad DK, patet utique Viris Archimedeis & ipſamet Logiſtica ſpatia iis parallelogrammorum ſeriebus inſcripta, nempe AVCB, & ADQB in eadem eſſe ratione VE ad DK.

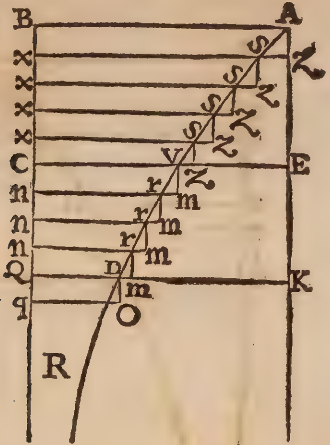
5 Sint jam altitudines B C, B Q incommenſurabiles; poterit, ex ſecundo aſſumpto noſtro *num.* 3. hìc demonſtrato, ſumi B N deficiens à B Q quantitate N Q minori qualibet data, commenſurabilis verò exiſtens ipſi B C; quomodo, ordinata N M R, habebit ſpatium A V C B ad A M N B eamdem rationem, quam V E ad M R, argumento proximè allato id concludente. Si igitur major eſſe dicatur ratio A V C B ad A D Q B, quàm ratio linearum V E, & D K, poterit ipſa M R tam proxima eſſe ipſi D K, & tam parùm ab ipſa deficere, ut ratio dictorum ſpatiorum ſit adhuc major, quàm ratio lineæ V E ad M R, hoc eſt quàm ratio ſpatii primi A V C B



ad A M N B, atque adeò foret A D Q B minus quàm A M N B, quod eſt abſurdum; ſi verò minor eſſe dicatur ratio dictorum ſpatiorum, quàm linearum illis, ut ſupra, reſpondentium, poterit nihilominus linea N M tam proxima eſſe ipſi Q D, & ſpatium A M N B tam parùm deficere ab ipſo A D Q B, ut ratio A V C B ad A M N B, hoc eſt ratio V E ad M R adhuc minor ſit, quàm ratio V E ad D K, atque adeò M R major foret ipſa D K, quod pariter eſt abſurdum; Æqualis igitur eſt ratio A V C B ad A D Q B rationi V E ad D K. Q. e. d.

6. Aliam adhuc expeditionem fortaſſe ejuſdem Theorematis demonſtrationem ſubjungemus, his aliis præmiſſis, quæ demonſtraſſe in ſequentibus non pigebit: & primò notare juvat duo quælibet ſpatia Logiſtica æquè alta, juxta indi-

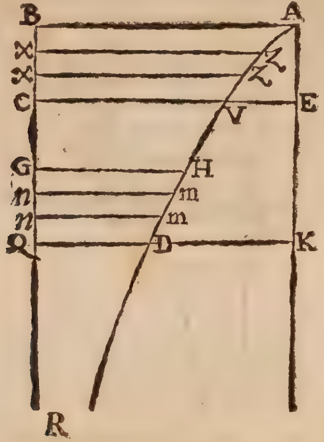
diviſibilium methodum, oſtendi eſſe ad invicem, ut ſunt Homologæ utriuſque ordinatæ; nimirum pari exiſtente altitudine B C, C Q, ſpatium B A V C ad C V Q D erit, ut B A ad C V, vel C V ad Q D; ſumpta enim ubivis B x æquali C n,



& ordinatis x S, n r, erit ex natura curvæ, ut B A ad x S, ita C V ad n r, & alternando, ut B A ad C V, ita x S ad n r; & hoc ſemper; ergo ut una ad unam, ita omnes ad omnes, nempe ut B A ad C V, ita ſpatium B A V C ad C V D Q; quod erat, &c. Neque refert ſint, ne hæc ſpatia conjuncta, ſibique immediatè ſuccedentia, an prorsùs disjuncta, vel ex parte communicantia, eadem quippe ratio, ut conſtat, perinde obtinet.

7 Deinde obſervare oportet, ſpatia poſt quamlibet ordinatam in infinitum producta eſſe ad invicem, ut ſunt ipſæ ordinatæ, ſeu baſes talium ſpatiorū; ſic D A B Q R, & D V C Q R, ex parte R utraque interminata, & infinitè longa, ſunt ad invicem, ut B A, & C V. Id ſanè conſtat, tum quia infinita B Q R, & infinita C Q R ſunt æquales, quum differant finita longitudine B C nullam rationem habente ad ipſarum utramlibet, quare ex dictis numero præcedente ſpatia iis adjacentia ſunt, ut ordinatæ A B, C V; tum etiam exactiùs ſic.

Diviſo interminato ſpatio D A B Q R in infinita ſpatia æquè alta B V, C H, G D, &c. ſimiliter & ſpatio D V C Q R in infinita ejuſdem altitudinis ſpatia C V H G, G H D Q, &c. erunt utrobique, ex ſupra demonſtratis in *præcedenti numero*,



ſpatia illa æquè alta, ut ſuæ ordinatæ, adeòq; in geometrica progreſſione; omnes igitur termini B V, C H, &c. ad omnes C H, G D, &c. in infinitum continuatos erunt, ut primus terminus B V ad primum C H, ex 12. v. elem. aut ex 29. lemmate Torricellii de dimenſione parabolæ aliàs citato; adeòque erunt, ut B A ad C V. Quod e. d.

8 Hinc ultrò profluit tertium Cl. Authoris Theorema, quòd ſpatium duabus ordinatis interjectum eſt ad infinitum ſpatiũ, quod poſt minorem illarũ exporrigitur, ut differentia utriuſq; ordinatæ ad minorem ipſarum; quia enim D A B Q R ad D V C Q R eſt, ut B A ad C V, igitur dividendo A V C B ad ſubſequens interminatum ſpatium poſt C V eſt, ut E V ad V C, & ſimiliter A D Q B ad interminatum ſpatium poſt Q D eſt, ut K D ad D Q.

9 Alia igitur primi hujus Theorematis demonſtratio ſic inſtituenda erit; ſpatium A B C V ad interminatum V D R Q C

eſt

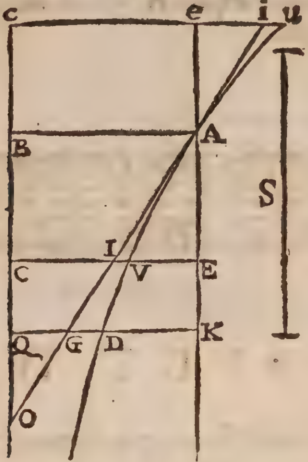
eſt, ex *num. præcedenti*, ut EV ad VC; & VDRQC ad interminatum DRQ ex *num.* 7. eſt, ut VC ad QD; denique DRQ ad DVCQ ex *num. præced.* & convertendo eſt, ut QD ad DK; igitur ex æquo AVCB ad CVDQ eſt, ut VE ad DK. Q. e. &c.

CAPUT IV.

Ad ſecundum Hugenii Theorema demonſtrandum, quæ ſit Logiſticæ parameter oſtenditur, & quomodò æqualis ſit ſubtangenti. Poſt demonſtrationem ſecundi Theorematis ad quartum proceditur, quo demonſtrato, determinatoque rectangulo æquali ſpatio Logiſticæ infinitè longo, exponitur Auctoris circumſpecta loquutio de ratione infiniti ſpatii ad finitum, ac familiaribus exemplis ſuadetur infinitè longa ſpatia determinatæ quantitati æqualia eſſe poſſe. Spatia per variæ rationis ordinatas in Logiſtica abſciſſa quam proportionem habeant; regula ad dignoſcendum quando ſpatia infinitè longa, aut infiniti termini finitam aggregent quantitatem, quando verò infinitam.

In

1 IN ſecundò Theoremate; *Iiſdem poſitis*, inquit Auctor, *& AO curvam tangente ad punctum A, quæ ſecet ipſas CE,*



QK in I, & G; ſpatia AVE, ADK ſunt inter ſe, ut rectæ VI, DG. Quod pariter ut demonſtretur determinanda priùs eſt Logiſticæ, ut ipſe appellare ſoleo, *Parameter*; hæc autem ejuſmodi eſt.

2 Exponatur linea S, quæ cum quavis ordinata inter Logiſticam, & axi parallelam, veluti cum VE, contineat rectangulum æquale ſpatio AVCB, adjacenti eidem curvæ ad partes axis; manifeſtum eſt, quòd eadem conſtans linea S continebit cum quavis alia ſimili ordinata DK rectangulum æquale ſpatio correſpondenti ADQB; cùm enim ex primo Theoremate ſpatia VABC, DABQ ſint, ut rectæ VE, DK, ſeu, ob communem altitudinem S, ut rectangulum ex S in VE ad aliud ex S in DK, ubi ſpatium VABC ſuppoſitum fuerit æquale rectangulo S in VE, ſpatium pariter DABQ æquale erit rectangulo ex eadem S in DK; itaque non incommodè linea S, Logiſticæ *Parameter* deinceps appellari poterit, eò quòd ſit linea, juxta quam ipſæ VE, DK poſſunt ſpatia Logiſticæ adjacentia AVCB, ADQB.

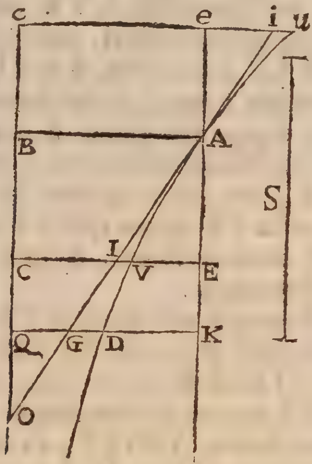
3 Oſtendemus autem hanc Parametrum Logiſticæ ſubtangenti, ideſt axis portioni inter ordinatam B A, & tangentem A O interceptæ, ſemper æqualem eſſe, itaut, poſita B O æquali ipſi S, juncta O A curvam tangat in A. Sumpto enim in O A quovis puncto I ſupra, vel infra A, ordinataque C I V, occurrente axi in C, curvæ in V, axi parallelæ A K in E: erit, ob ſimilitudinem triangulorum O B A, I A E, ipſa O B ad B A, ut A E ad E I; rectangulum igitur O B in E I æquale erit rectangulo B A E; ſed ſpatium B A V C eſt, ex *numero prædenti*, æquale rectangulo Parametri, ideſt ipſius O B in V E; ergo rectangulum B A E ad ſpatium B A V C eſt, ut recta I E ad E V; puncto autem i ſupra A exiſtente manifeſtum eſt rectangulum B A e minus eſſe ſpatio B A u c, ergo tunc i e minor eſt, quàm e u; ob oppoſitam rationem, accepto puncto I infra ipſum A, erit rectangulum B A E majus ſpatio B A V C, unde & recta I E major ipſa E V; quare in utroque caſu punctum I eſt extra curvam, & ipſa O A eſt tangens. Quod erat demonſtrandum.

4 Hoc poſito, demonſtratio ſecundi Theorematis Hugeniani ſic inſtituenda erit; cùm, ob ſimilitudinem triangulorũ O A B, G A K, ſit O B ad B A, ut A K ad G K, erit rectangulum ex O B in G K æquale rectangulo B A K Q, ſed O B in D K jam æquatur ſpatio A D Q B, ex ſupradictis; igitur reliquum rectangulum ex O B in D G æquatur reſiduo ſpatio D A K. Similiter oſtendetur, rectangulum ejuſdem O B in V I æquari ſpatio A E V; igitur ut prædicta rectangula, ſive ut eorum baſes D G, V I, ita ſpatia ipſa D A K, V A E; quod erat demonſtrandum.

5 De tertio Hugenii Theoremate, quod eſt; *Spatium duabus ordinatis interjectum eſſe ad ſpatium infinitum, quod poſt minorem earumdem ordinatarum exporrigitur inter Logiſticam, & ejus Aſymptoton, ut differentia earumdem ordinatarum eſt ad minorem; nempe in præcedenti figura ſpatium A B Q D eſſe ad ſpatium infinitum, quod poſt minorem earumdem ordinatarum exporrigitur inter Logiſticam, & ejus Aſymptoton, ut differentia earumdem ordinatarum eſt ad minorem, ideſt in præcedenti figura, ſpatium A B Q D eſſe ad ſpatium infinitum, quod poſt Q D in-*

inter curvam, & aſymptoton interjicitur, ut KD ad DQ; de hoc, inquam, Theoremate non eſt quòd ſimus ſolliciti, quùm ejus veritas jam innotuerit ex dictis *cap. præced. num.* 8. ut nihil jam addendum ſuperſit, niſi hoc quaſi corollarium, ſcilicet.

6 Quòd ſpatium infinitum poſt quamvis Logiſticæ ordinatam QD curvæ, & aſymptoto interjectum, æquale ſit rectangulo ſubtangentis, ſeu parametri BO in eamdem ordinatam;



nam, ut DK ad DQ, ita rectangulum ex BO in DK ad rectangulum ex BO in DQ, & ita etiam ſpatium ADQB ad ad infinitum ſpatium poſt QD exporrectum; quare quum rectangulum ex BO in DK ſit, ex dictis, æquale ſpatio ADQB, etiam BO in DQ erit æquale ſpatio infinito poſt QD exporrecto.

7 Quæ verò circumſpectè ingerit Nobiliſſimus Auctor illis verbis: *Cùm porrò dicimus infinitum ſpatium ad quoddam finitum in certa ratione eſſe, hoc unum intelligendum volumus, tam proximè illud accedere ad datum ſpatium, quod finito illi ſpatio in dicta proportione reſpondeat, ut differentia minor evadere poſſit qualibet magnitudine data.* Non ita accipienda ſunt, nec eò ſpectant certiſſimè, ut ſcrupulum movere videatur Cl. Author,

num

num exacta æſtimanda ſit proportio, quam inter utrumq; ſpatium aſſignat; ex quo enim Torricellius infinitum ſolidum hyperbolicum in cylindrum æqualem determinatæ baſis, & altitudinis commutare Geometras docuit, necnon infinitorum proportionalium terminorum ſeries in unam ſummam colligere, jam extra dubium eſt magnitudinem una, vel altera dimenſione infinitam (putà multitudine, licet non mole, ſi de quantitate diſcreta ſermo ſit, longitudine, licet non latitudine, ſi de ſpatiis ſuperficialibus loquamur, aut longitudine, licet non craſſitie, vel craſſitie quidem, ſed non longitudine, loquendo de ſolidis) ita reliquis dimenſionibus ad abſolutam ejus magnitudinem integrandam concurrentibus limitari poſſe, ut quantitatem prorſus finitam adæquet.

8 Neque in hoc relictum eſſe puto Geometris ambigendi locum, ut ut id Tyronibus propè incredibile videatur, qui admirationi, aut potius præjudicatæ, qua tenentur, opinioni paulatim deponendæ aſſueſcent, ſi has fractionum ſeries $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, &c. in eadē ratione dupla decreſcentes, aut $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$, cæteraſque decreſcentes in ratione tripla, aliaſve cujuſvis rationis progreſſiones in infinitum minoribus, & minoribus terminis coaleſcentes in unam redigere ſummam attentaverint; cùmque experti fuerint, non poſſe tot ſumi in prima ſerie, quæ umquam ad unitatem pertingant, eò quòd, in additione cujuſlibet termini ad præcedentes, non additur quod ipſis deficit ad unitatem integrandam, ſed ſemiſſis dumtaxat talis defectus, putà ad $\frac{1}{2}$ addendo $\frac{1}{4}$ additur ſemiſſis ejus, quod primo termino deficiebat ad unitatem, & alter ſemiſſis relinquitur, addendo autem duobus præcedentibus $\frac{1}{8}$ non additur quod in prima additione relictum fuerat, nempe quadrans unitatis, ſed ejus quadrantis ſemiſſis, ideſt octans, altero octante relicto, qui defectus rurſus non ſuppletur per ſequētem additionem, quippe non additur octans relictus, ſed ejus ſemiſſis, nempe $\frac{1}{16}$, atque ita porrò; nec poſſe tot ſumi in ſerie ſecunda, quæ umquā unitatis ſemiſſem reſtituant, quia cùm primus terminus $\frac{1}{3}$ de-

ficiat per ſemiſſem ſui, ideſt per $\frac{1}{6}$, à ſemiſſe unitatis, non reſarcit quis illum defectum addendo $\frac{1}{9}$, quippe qui deficiat ab $\frac{1}{6}$ rurſus per ſui ſemiſſem $\frac{1}{18}$, hic verò non ſuppletur additione ſequentis termini $\frac{1}{27}$ deficientis ab illo reſiduo $\frac{1}{18}$ rursùs per ſui ſemiſſem, atque ita porrò ſemper procedendo. ita ut nihilominus ad hos limites, nempe ad unitatem in ſerie prima, & ad ſemiſſem unitatis in ſerie ſecunda, ſemper propiùs accedatur ſumptis pluribus, & pluribus terminis ejuſdem ſeriei, defectu ſemper decreſcente infra quamlibet aſſignatam quantitatem (veluti in figuris plurium, & plurium laterum circulo, aut parabolæ, alterive curvo ſpatio inſcriptis veterum more contingit) donec penitus in ſeriei fine evaneſcat: cùm id, inquam, experti fuerint, atque attenta meditatione rei hujus naturam contemplaverint, fateantur neceſſe erit, quòd ſi prorſus omnes illi infiniti termini ſimul acciperentur, præcisè forent in prima ſerie æquales unitati, in ſecunda ſerie unitatis ſemiſſi, in aliis alteri quantitati ſimiliter determinandæ.

9 Utì autem in quantitate diſcreta, ita in continua (quæ ſemper in diſcretam dividi, & reſolvi poteſt) idem obtinet; ſpatium quippe infinitè longum in ſpatia determinatæ longitudinis multitudine infinita reſolvi poteſt, quæ poterunt ſemper minora, & minora eſſe, ſi latitudo proportionaliter decreſcere intelligatur, itaut illa infinita ſpatia per ordinem correſpondeant infinitis terminis alicujus geometricæ progreſſionis, utì certè correſpondent ſpatia Logiſtica ad æquales axis portiones abſciſſa, utì ex dictis *præced. cap. num.* 6. colligitur; omnia ergo hujuſmodi æquè alta ſpatia per infinitam Logiſticæ longitudinem diſtributa, quum ſint quædam ſeries geometrica proportionaliter decreſcentium terminorum in ratione, vel dupla, vel tripla, vel alia qualibet, prout extremæ ordinatæ cujuslibet æquè alti ſpatii in data ratione acceptæ fuerint, determinatæ magnitudini æqualia eſſe, prout in fractionibus contingit, nil prorsùs repugnat, imò vel ex hoc ipſo, quod in fractionibus oſtendimus, evidentiſſimè ita debere contingere demonſtratùr; idemque ſimiliter de ſpatiis aliis infinitè longis,

gis, de quibus paſſim Geometræ, & nos infra nonnulla dicturi ſumus, abſque ſcrupulo pronunciandum, quòd ſcilicet determinatæ magnitudini æqualia ſint, dummodò tota prorſus accipi intelligantur, nulla ipſorum portione relicta; quod quia conceptu difficillimum eſt, quum infiniti natura reſpuat, nedum ut totum integrè deſignari queat, ſed etiam ut imaginatione comprehendi valeat, itaut, poſt quamlibet partem, non aliam, & aliam ejus extenſionem cogitemus, quippe cujus ultimum limitem non concipimus; ideò prudens Auctor cautè addidit: Spatia illa, non tam abſolutè infinita, quàm juxta illam dimenſionem interminata, ad datam cum ſpatio finito proportionem tam propè accedere, ut diſtare poſſint defectu minori quolibet dato, quàmdiu ſcilicet illud ſpatium indeterminatè ſumitur, ut longiùs, ac longiùs protenſum, nec totum ſemel integrè accipi intelligitur, aut ſaltem accipi fingitur.

10 Mirum autem nemini videatur, quòd idem ſpatium Logiſticæ infinitè longum in ſpatia cujuslibet progreſſionis, nempe terminorum in ratione dupla, tripla, quadrupla, ſeſquialtera &c. decreſcentium in infinitum diſtribui poſſit, pro varia portionum axis altitudine, quum tamen progreſſiones diverſarum rationum non ejuſdem ſint valoris, ſed progreſſio dupla æqualis unitati, tripla ſemiſſi unitatis, quadrupla trienti, &c. non enim eadem eſt quantitas, quæ locum unitatis obtinet diviſo Logiſticæ ſpatio in terminos rationis duplæ, ac quæ eamdem unitatem repræſentat, cùm dividitur in terminos rationis triplæ, aut quadruplæ; ſiquidem in primo caſu unitas eſt duplum primi ſpatii, in ſecundo triplum ſpatii primi, in tertio quadruplum, &c. quæ ſunt quantitates longè diverſiſſimæ; intereà hinc habetur, eamdem magnitudinem eſſe duplam ſpatii, cujus ordinatæ ſint in ratione dupla, dimidiam tripli, hoc eſt ſeſquialteram, ſpatii, cujus ordinatæ ſint in ratione tripla, trientem quadrupli, hoc eſt ſeſquitertiam ſpatii, cujus ordinatæ ſint in ratione quadrupla, atque ita deinceps, eadem exiſtente omnium horum ſpatiorum majori ordinata, ſingulis pro communi rationis antecedente inſerviente; adeòque ſi totum Logiſticæ infinitum ſpatium ponatur eſſe partium 12. ſpatium primũ, cujus ordinatæ ſint in ratione dupla, erit partium 6, & cujus

ordinatæ in ratione tripla, partium 8, & cujus in ratione quadrupla, partium 9; ac ſimiliter de aliarum rationum ſpatiis ratiocinari licebit; id quod tamen ex primo etiam Auctoris Theoremate facilè deduci poteſt.

11 Neſcio autem, an obiter, dum ferrum candet, exponere generalem regulam juvet, qua dignoſci poſsit, quando ſpatia infinitè longa, vel termini multitudine infiniti, etiam cùm decreſcunt, quantitatem abſolutè infinitam adæquent, & quādo prorſus finitam, ac terminatam. Eam certè ante plures annos, quum Theologicis ſtudiis adoleſcentes noſtros imbuerē, in quadā Appendice ad Tractatum de Viſione Dei, talem proferebam. Quoniam, ut innui in notatione Præfationis Vivianeorum Problematum *pag.* 27. duarum quantitatum ratio componitur ex rationibus ſingularum dimenſionum illis quantitatibus competentium, & invicem comparatarum, expendendum eſt, num ratio ex his compoſita ſit ratio finita, nec ne. Jam, aggregatum plurium terminorum, quatenus quædam diſcreta quantitas eſt, unam tamen continuam magnitudinem, & quantitatem integrans, duas habet dimenſiones, quippe ex duplici capite quantitas ex hiſce terminis aggregata creſcere, & major fieri poteſt, nimirum ex terminorum *multitudine*, & ex propria ſingulorum *quantitate*; quò plures enim termini adunantur, eò major, cæteris paribus, quantitas conſurgit, putà quò plures fractiones in unam ſummam colliguntur, eò major ſumma conficitur; & ſtante aliàs pari terminorum multitudine, quò *majores* in ſe ipſis ſinguli fuerint, eò pariter major magnitudo colligitur; ſic tres fractiones decimales majorem ſummam conficiunt, quàm tres milleſimæ, aut centeſimæ; ut ergo videamus, num propoſitis quibuslibet infinitis terminis, ij quantitatem infinitam aggregent, an tantùm finitam, obſervandum eſt, an creſcente arithmeticè in infinitum ipſorū multitudine, decreſcat pari ratione, aut majori, vel minori ipſorum quantitas; ſi in eadem ratione decreſcat, ut in 1. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$, &c. ubi ſecundus terminus eſt ſemiſſis primi, tertius triens ejuſdem, quartus ejus quadrans, &c. prout multitudo duorum eſt dupla unius, triū eſt tripla, quatuor quadrupla, &c.

procul dubio quantitas omnium ſimul infinita erit, quia cùm terminorum multitudo ſic æquipolleat ipſorum abbreviationi, ſeu parvitati, ratio quantitatis talium terminorum ad aliã aſſignabilem quantitatem, putà ad unitatem, utpotè compoſita ex ratione multitudinis, & parvitatis eorumdem terminorũ reſpectu dictæ unitatis (altera ratione alteram elidente) erit ratio infinita, & ipſorum terminorum quantitas æquipollebit quantitati infinitorum terminorum invicem æqualium, quæ certiſſimè infinita eſt. At ſi in majori ratione termini decreſcant, ut accidit in ſeriebus numero 8 adductis, quæ geometricè decreſcunt, creſcente terminorum multitudine arithmeticè (atque in aliis benè multis, quæ etſi non geometricè, omnibus tamen compenſatis in majori ratione decreſcunt, quàm creſcat ipſarum multitudo) tunc præpollente parvitate ſingulorum terminorum eorumdem multitudinis incremento, prodibit ex utriuſque compoſitione finita ratio, & aggregabitur quantitas prorſus finita; quando autem in minori ratione decreſcant termini, quàm illorum pluralitas augeatur, ratio pluſquàm infinita exinde conſurget, ſeu à fortiori, quàm in primo caſu, dicendum erit, omnium aggregatum quantitatis eſſe ſimpliciter, ut ajunt, infinitæ, præpollente multitudinis incremento ipſorum abbreviationi terminorum.

12 Idem applica ſuperficiebus, aut ſolidis, quorum una, aut altera dimenſio infinita ſit, altera tamen, aut reliquis continuè diminutis; prout enim in majori, aut eadem, minorive ratione minuetur altera dimenſio, quàm creſcat ea, quæ in infinitum extenditur, judicandum erit ſpatium illud præcisè finitum eſſe, aut infinitum, vel pluſquàm (ſi dicere liceat) infinitum. Hinc Cl. VVallıſius in Arithmetica Infinitorũ optimè obſervat, ſpatium hyperbolæ, & aſymptoto interjectum, cujus latitudo in eadem ratione minuitur, in qua longitudo aſymptoti creſcit (propter latera parallelogrammorum æqualium ejuſmodi ſpatio inſcriptorum neceſſariò reciproca) eſſe idcircò infinitæ prorsùs magnitudinis, in hyperbolis autem aliorũ graduum, ex una quidem parte finitum eſſe, ubi in majori ratione decreſcunt lineæ ad aſymptoton ordinatæ, atque adeò la-

latitudo ejuſdem ſpatii, ex altera autem parte, ideſt ad aliam aſymptoton, pluſquàm infinitum exiſtimandum, eò quòd in minori ratione ordinatæ decreſcant; id quod in aliis etiam ſpatiis, tum ſolidis, tum ſuperficialibus obſervari poteſt.

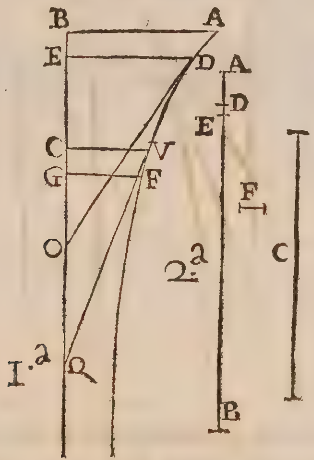
CAPUT V.

Quartum Hugenii Theorema, pridem demonſtratum, nova demonſtratione per diverſam methodum ſtabilitur; Tractoriæ proprietas hinc deducta, quòd ordinatæ ad æquales curvæ partes ſint invicem proportionales. Cuilibet curvæ tangentem ducere. Velocitates in diverſis curvæ punctis ſunt, ut facta ex ordinatis in ſubtangentes alternè ſumptas. In Hyperbola ſunt, ut quadrata temporum contrariè ſumptorum. Determinatio tangentium ad infinitas parabolas. Eadē expeditior. In aliis curvis quomodò tentanda. Variarum ad id conſtructionum demonſtratio. Subtangens curvarum, quæ ad modum Spiralium deſcribuntur. Infinitæ Spiralium ſpecies quas ſubtangentes habeant, & quomodò infinitis parabolis reſpondeant. Tangens Spiralis Geometricę, & quarumvis figurarum per alterius convolutionem genitarum. Tangens Conchoidis Nicomedeę, aliis infinitis Conchoidibus, & Subconchoidibus applicabili methodo oſtenſa. Eadem geometrica demonſtratione confirmata. Tertia demonſtratio quarti Theorematis Hugeniani. Curva parabolica Logiſticæ ſemper perpendicularis.

1 Quar-

1 QUartum Auctoris Theorema; *Quòd ſubtangens, ut BO in eadem figura, ejuſdem ſemper eſt longitudinis, ad quodvis Logiſticæ punctum tangens pertineat*, alia demonſtratione non indiget, quum probatum fuerit *cap.* 4. *num.* 3. ſubtangen tem æqualem ſemper eſſe Parametro hujus curvæ, quæ linea quædam conſtans, & definita eſt; verùm ad pleniorem ſciētiam id aliter, atque aliter demonſtrabimus, diverſa methodo, eaque ad alias longè veritates applicabili.

2 Secunda igitur hujus Theorematis demōſtratio ſic inſtitui poterit. Sint *fig.* 1. hujus diagrammatis quælibet ad axem Logiſticæ ordinatæ AB, VC, tangentes ad eadem puncta AO,

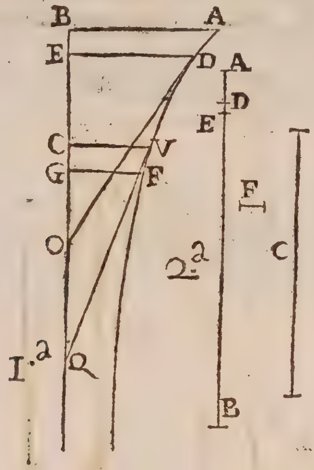


VQ. Dico interceptas ordinatis, & tangentibus BO, CQ (quæ ſubtangentes appellantur) æquales eſſe. Sumatur quantumvis parva BE, illique æqualis CG, ut ordinatis ED, GF portio tangentis AD ferè cum curva AD, & portio tangentis VF ferè cum curva VF coincidere cenſeri poſſit, ob infinitè parvum intervallum utrivis ordinatarum pari interjectū: erit igitur ex natura curvæ, in qua ſunt puncta D, F, ipſa AB ad ED, ut CV ad GF, juxta primariam Logiſticæ affectionem; rurſus cùm puncta D, F ſupponantur & in tangentibus

eſſe,

eſſe, erit AB quidem ad ED, ut BO ad OE; CV verò ad GF, ut CQ ad QG; ergo eadem erit ratio BO ad OE, que CQ ad QG, & per converſionem rationis eadem ratio BO ad BE, quæ QC ad CG; ſuntq; conſequentia æqualia; igitur & antecedentia BO, CQ æqualia erunt. Q. e. d.

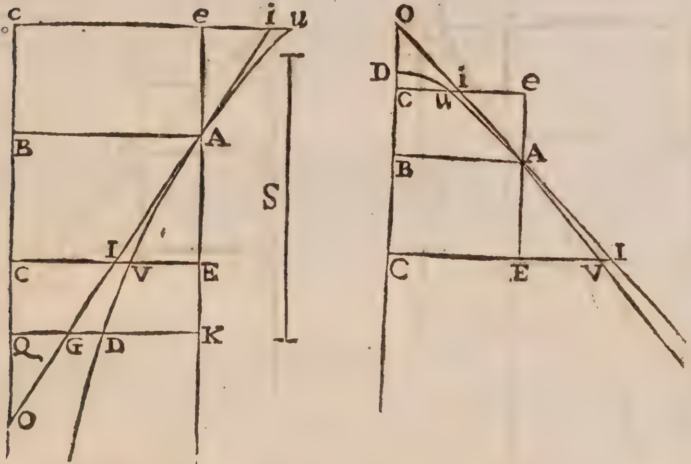
Poterat rigoroſiùs argui per deductionem ad abſurdum, ſed quorsùm ita? Obſerva potius quid eveniſſet, ſi natura curvæ ea foret, ut ſumptis non in axe, ſed in ipſa curva æqualibus portionibus AD, VF, eædē ordinatæ proportionales eſſent;



An non enim eodem argumento conſtaret, OA ad AD eſſe, ut QV ad VF: unde conſequentibus æqualibus exiſtentibus, etiam antecedentia, ſcilicet, tangentes ipſas AO, VQ ubilibet æquales futuras, adeòque ejuſmodi curvam illam ipſam fore, quam *Tractoriam* vocant? eam ſcilicet, quam deſcriberet grave A funi AO alligatum, dum funis extremum O per rectam OQ trahitur in eodem horizontali plano; pondus ſiquidem perfectè ſequetur ejuſdem funis directionem, adeòque ejus viæ tangens erit perpetuò eadem funis longitudo: quamquàm hoc generale eſt, ut cùm relatio ordinatarum ad axem mutatur in relationem ordinatarum ad curvam, eadem ex-

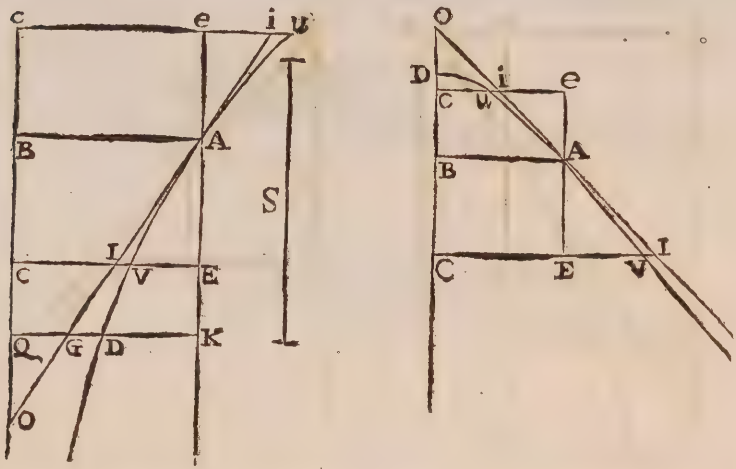
expreſſio ſubtangentis tranſeat ad ipſam tangentem, ut pluribus exemplis confirmare in promptu eſſet.

3 Utilius erit Tertiæ demonſtrationi ejuſdem Theorematis viam ſternere generali quodam lemmate circa tangentium inventionem præmiſſo, quod ex Torricellii doctrina obiter indicata in l. 1. de mot. gr. prop. 18. ejuſque Scholio, in hunc modum deduxi; ſicque univerſaliter proponere ſtatui. Ad datum cujuslibet curvæ punctum tangentem ducere. Datum



ſit punctum A curvæ cujuslibet D A V, cujus axis B C, ordinata ex dato puncto A B: concipiatur hæc curva deſcripta motu ordinatæ B A per axem B C æquabiliter fluentis, ſibique æquidiſtanter delatæ, & ex motu puncti A versùs B accedentis, vel ab eodem in ipſa linea recedentis, non jam æquabiliter (ſic enim recta linea, non curva deſcriberetur) ſed velocitate accelerata, aut retardata, prout opus ad eam curvam generandam. (quælibet certè curva hoc modo genita intelligi poteſt) Fiat igitur, ut velocitas, quam punctum fluens habet in ſitu A ad velocitatem ordinatæ æquabiliter delatæ, ita ipſa ordinata A B ad portionem axis B O, acceptam versùs eas partes, ad quas motus acceleratur, ſi curvæ cavitas axem reſpiciat, ad

quas verò retardatur ſi curva axi convexitatem obvertat. Dico junctam O A eſſe tangentem. Sumatur enim in ipſa O A, ad partes accelerationis punctum i, ad partes verò retardationis punctum V, ordineturque c u i, C V I occurrens axi in c, C, curvæ in u, I, axi parallelæ A E per A ductæ in e, E. Quoniam velocitas puncti A per A B fluentis ad velocitatem lineæ A B per axem delatæ eſt, ut A B ad B O, ſeu I E ad E A, aut i e ad e A, manifeſtum eſt, quòd ſi motus puncti A non

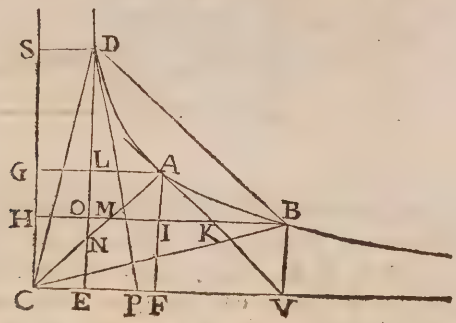


accelerаretur, aut retardaretur, fieret per ipſam A I, ſeu A i, ita ut quo tempore ordinata deſcenderet, aut aſcenderet per B C, ſeu A E, aut B c, ſeu A e, punctum A percurreret partem E I, ſeu e i, repereiretur in I, vel i. Verùm quoniam motus puncti A curvam deſcribentis intereà acceleratur versùs u, & versùs contrariam partem V retardatur, ita ut velocitas ipſius A in A major ſit, quàm in V, quia versùs eas partes remittitur, minor autem, quàm in u, quum versùs eas partes invaleſcat; ideò quo tempore ordinata venerit in C E, punctum A curvam generans minorem ordinatæ portionem E V confecerit, quàm confeciſſet ſi priſtinam velocitatem retinuiſſet; minor eſt igitur E V, quàm E I; cùm verò ordi-

nata

nata venerit in c e, punctum A curvam generans majorem ejuſdem ordinatæ tractum e u pertranſierit, quàm ſi priſtinæ velocitati nullos accelerationis gradus addidiſſet; major eſt igitur e u, quàm e i; & ideò puncta l, i ſunt utrobique ultra, & extra curvam, quare ipſa O A tangit. Quod erat demonſtrandum.

Obſervare hinc juvat, velocitates puncti non æquabiliter fluentis, veluti in figura D A B ad axem C V comparata, in

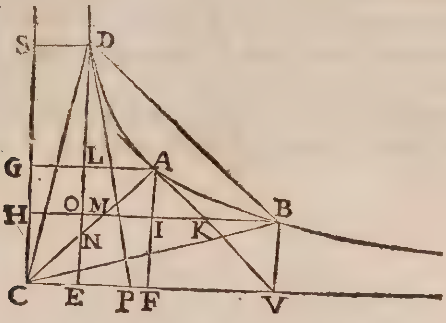


punctis D, A, eſſe ad invicem, ut facta ex ordinatis in ſubtangentes alternatim ſumptas, putà, exiſtentibus tangentibus D P, A V, ordinatiſque D E, A F, ut factum ex D E in F V ad factum ex A F in E P; nam velocitas puncti fluentis in D ad ſimilem velocitatem in A rationem compoſitam habet ex velocitate talis puncti in D ad æquabilem velocitatem lineæ deſcendentis, & ex hac ipſa velocitate ad velocitatem puncti ejuſdem in A; ſed prima ratio, ex hoc Theoremate, eadem eſt, quæ D E ad E P, ſecunda verò eadem, quæ V F ad F A; igitur ratio velocitatis puncti fluentis in D ad velocitatem ejuſdem in A componitur ex D E ad E P, & ex V F ad F A, ideſt eadem eſt, quæ facti ex D E in F V ad factum ex A F in E P.

Unde adhuc colligitur, in Hyperbola Apolloniana D A B, cujus aſymptoti S C, C V, velocitates puncti fluentis in quibuslibet punctis D, A eſſe in duplicata ratione temporum

 con-

contrariè ſumptorum; ſpatia enim æquabili motu lineæ per axem C V delatæ tranſacta, velut C E, C F ſunt, ut tempo-

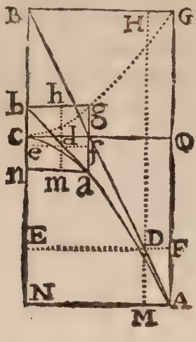


ra; ſubtangentes autem E P, F V ſunt ipſis E C, F C diſtantiis à centro æquales; ergo eædem ſubtangentes pariter ſunt, ut E C, F C, ſeu ut F A, E D; ratio igitur facti ex D E in F V, & ex A F in E P erit eadem, quæ facti ex D E in F C, & ex A F in E C ideſt compoſita ex D E ad A F, & ex F C ad C E, quæ eadem eſt priori, unde cum illa componit duplicatam rationem F C ad C E, quæ proinde duplicata erit temporum contrariè ſumptorum, ſicut & homologarum ordinatarum D E, A F; & hoc erat demonſtrandum.

4 Hinc tangentes omnium in primis parabolarum determinationem accipiunt; quemadmodum *fig. ſeq.* ſi C a A fuerit parabola quadratica, quæ æquabili motu ipſius C N per C Φ ſibi æquidiſtanter delatæ, ac deſcenſu naturaliter accelerato, ideſt ſingulis æqualibus temporibus novum ſibi celeritatis augmentum ſuperaddente, puncti C versùs N per lineam fluentem demiſſo deſcribitur, contingit, ordinata ex foco n ipſa n a, celeritatem puncti deſcendentis in quolibet curvæ puncto A ad æquabilem celeritatem ipſius lineæ delatæ ſemper eſſe, ut ordinata ex dicto puncto A N ad prædictam ordinatam ex foco n a, juxta citatam prop. Torricellii; eò quòd, cùm velocitates deſcenſuum creſcant, ut tempora, atque adeò ut ſpatia motus æquabilis, ideſt ut Φ C, f C, ſeu A N, a n, quas linea

N C

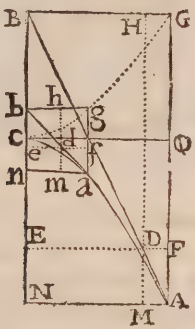
N C æquabiliter tranſilit, ſi velocitas deſcenſus in A ſit ut A N, velocitas in a erit ut a n; velocitas autem deſcenſus in a eſt



æqualis velocitati motus æquabilis, quia ordinata ex foco a n dupla eſt abſciſſæ c n, eadem verò eſt celeritas, quæ motu in hac ratione accelerato acquiritur deſcenſu per C n, & qua æquabiliter perſeverante conficitur duplum ſpatium n a, igitur ſi velocitas in A ſit A N, velocitas motus æquabilis erit eadem quæ deſcenſus in a, ideſt erit, ut n a: quemadmodùm igitur hoc in quadratica obtinet; ita in cubica, ubi celeritates deſcenſuum creſcunt in duplicata ratione temporum, ideòque ſunt, ut quadrata ſpatiorum motus æquabilis, ſcilicet A N, a n, comparando deſcenſum in A ad deſcenſum in a (facta priùs a n tripla abſciſſæ C n, quia hoc accelerationis genere velocitas per C n deſcendendo acquiſita, triplo ſpatio a n percurrendo par eſt, ſi æquabiliter permanere intelligatur, unde ſimiliter velocitas deſcenſus in a æqualis erit velocitati æquabili lineæ) habebitur, velocitatẽ deſcenſus in quovis puncto A eſſe ad æquabilem illam lineæ delatæ velocitatem, ut quadratum A N ad conſtans quadratum a n; ſimili ratione in parabola quadrato-quadratica erit velocitas deſcenſus in A ad illam æquabilem velocitatem, ut cubus A N ad a n poſitam quadruplam ipſius n C abſciſſæ, atque ita deinceps in aliis gradibus, facta ordinata a n tam multiplici abſciſſæ C n, quàm multiplex eſt unitatis exponens ordinatarum.

5 Quam-

5 Quamquàm vix operæ pretium fuerit iis velocitatibus comparandis inſiſtere in parabolarum genere, ubi ſemel conſtiterit in quonam puncto velocitas æquabilis motus adæquet celeritatem deſcenſivam, invento ſcilicet ſemel puncto a, ubi ordinata a n æqualis eſt ſubtangenti n b (quod quidem evenit ubi a n ad n C eſt, ut exponens gradus parabolæ ad unitatem, ſcilicet in quadratica, ut 2 ad 1. in cubica, ut 3 ad 1. &c.)

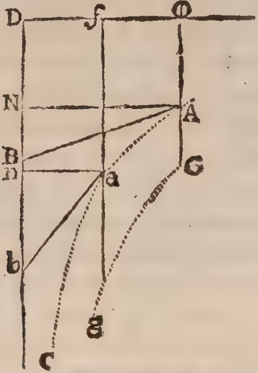


quia enim curvæ parabolicæ ſimili in ſingulis ſuis partibus accelerationis genere deſcribuntur, ita continuè ordinato, ut ſpatia curvilinea ad circumſcriptum parallelogrammum æqualem ſemper rationem obtineant, etiam in his eadem ſemper erit ratio ſubtangentis b n ad abſciſſam n C, vel ſpatii C f ad interceptam à tangente f d; unde cùm notum fuerit a n, ſeu b n ad n C duplam eſſe in quadratica, triplam in cubica parabola, &c. etiam B N ad N C in eadem ſemper ratione eſſe manifeſtum erit, quare expeditiùs dabitur tangens ad quodlibet punctum A.

Similiter & in Hyperbolis, quarum pariter uniformis eſt ubique acceleratio, unde & parallelogrammorum quibuslibet ſpatiis inſcriptorum eadem ſemper eſt ad infinitè longa ſpatia iiſdem baſibus inſiſtentia proportio, ſubtangentes ad diſtantias à centro eamdem perpetuò rationem obſervabunt. Invento itaque *fig. ſeq.* in Hyperbola A a C ad aſymptoton f D, D b puncto a, ubi ſubtangens æquatur ordinatæ, ideſt ubi velo-

ci-

citas motus æquabilis deſcenſivam adæquat (quod quidem evenit, ubi a n ad n D eſt, ut exponens gradus Hyperbolæ



ad unitatem, ſcilicet in lineari, ſeu Apolloniana, ut 1. ad 1. in quadratica ut 2 ad 1. in cubica ut 3 ad 1. &c. prorſus ut in Parabolis contingit, ſimili enim cum illis motu deſcribuntur, ſed dumtaxat reciprocè poſito, unde evenit ſubtangentes cadere ad partes oppoſitas axis origini, ideſt ſub ipſis ordinatis) cùm conſtiterit ſubtangentem inventi puncti a, nempè b n eſſe æqualē in prima, duplam in ſecunda, triplam in tertia Hyperbola diſtantiæ à centro n D, notum ſimiliter erit, etiam quamlibet aliam ſubtangentem B N in eadem eſſe ratione ad diſtantiam N D ſuæ ordinatæ N A ab eodem centro.

6 Difficilior eſt aliarum figurarum tractatio, in quibus non uſque adeò perſpecta occurret ad ſingula puncta velocitatum in curvæ geneſim conſpirantium proportio; generaliter tantùm dici poſſet, velocitates deſcenſivas ad ſingula curvæ puncta eſſe ad invicem, ut ſpatia ſynchronis quibuſcumque temporibus peracta, ſive ut differentiæ æquè diſtantium ordinatarum intervallo infinitè parvo diſſitarum, ſeu (*vide fig. pag. anteced.*) ſi concipiatur ad axem C f Φ curvæ cujuslibet C a A applicata figura Φ G g C, cujus portiones à vertice abſciſſæ per ordinatas, veluti g C f, G C Φ ſint ad invicem, ut ordinatæ ad priorem curvam f a, Φ A, quò fiet lineas ipſas f g, Φ G, utpotè minimas, & infinitè parvas differentias duorum ex talibus

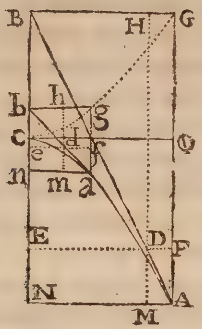
ſpa-

ſpatiis à vertice abſciſſorum, optimè repræſentare infinitè parvas differentias ordinatarum fa, Φ A, quibus dicta ſpatia proportionantur, adeòque etiam exprimere gradus velocitatum motus deſcenſivi, itaut ſi talis celeritas in a ſit, ut fg, in A futura ſit, ut Φ G; & ſi reperiatur in curva tale punctum a, cujus ordinata af ad abſciſſam fC in eadem ſit ratione, in qua ſpatium fgC ad parallelogrammum illi circumſcriptum fgbC, habebitur in a puncto velocitas deſcenſiva æqualis celeritati tranſverſi motus æquabilis, adeòque hæc velocitas æquabilis optimè exprimetur per fg, cæteris deſcenſivi motus celeritatibus per alias parallelas, ut ſupra, determinatis; & ſi fiat, ut parallelogrammum circumſcriptum cuivis ſpatio CGΦ ad ipſummet ſpatium, ita BN ad NC, aut CΦ ad Φ f, juncta AB, ſeu Af erit tangens; ſimiliter ſi fiat ut rectangulum AΦG ad ſpatium ΦGC, ita AΦ ad Φ f, aut ſi ad rectam Φ G applicetur ſpatium Φ GC, & faciat latitudinem Φ f, juncta Af tanget, quorum unum, vel alterum juxta variam curvæ naturam, ejuſve geneſim, præſertim ſi ab initio figura CGΦ determinata fuerit (ut ſi quæratur de curva CaA genita ex tranſverſali æquabili motu lineæ CN per datam CΦ, & deſcenſivo puncti C per totam CN, ita accelerato, ut in quovis puncto a gradus ejus celeritatis proportionetur ordinatæ fg dati trilinei, alteriuſve figuræ CCΦ datæ, & ad datam lineam CΦ applicatæ) aut aliquid cum his connexum facilè innoteſcet, ac tangens expeditè determinabitur.

7 Quorum omnium ratio, quamquàm ſufficienter in demonſtratione *num.* 3. allata contineatur, breviter indicari poterit ſic. Tangens ad aliquod curvæ punctum illa recta eſt, quam deſcripſiſſet, & deſcribere pergeret punctum deſcendens ſi gradum velocitatis, quem in dato curvæ puncto obtinet, æquabiliter retinuiſſet, tranſverſali lineæ motu eodem remanente; ex eo enim, quòd, remota acceleratione, motus puncti A, in *fig. num.* 3. fieret per AI, oſtenſum eſt AI tangentem eſſe; at ſi fiat BN ad NC, ut parallelogrammum BGΦC ad figuram CGΦ, juncta BA erit via, cui inſiſteret punctum deſcendens, modò gradum celeritatis ſuæ ΦG toto tempore

CΦ

C Φ retinuiſſet (confeciſſet enim ſpatium B N, quod ad N C acceleratè percurſum foret, ut planum velocitatis æquabilis Φ G B C ad planum acceleratæ Φ G g C, ſpatium verò tranſverſali motu emenſum eſſet eadem N A) igitur juncta in tali

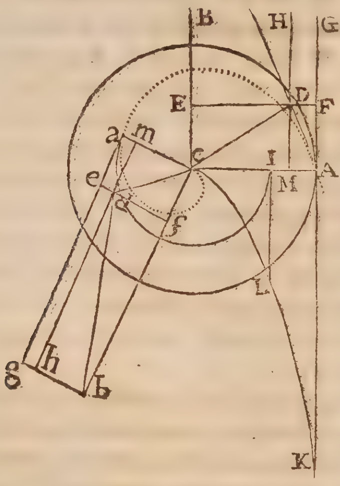


conſtructione A B erit tangens; cùmque & C Φ ad Φ f ſit in eadem ratione B A ad A f, ſeu B N ad N C; necnon A Φ ad Φ f rationem habeat compoſitam ex A Φ ad Φ C, ſeu rectanguli A Φ G ad C Φ G, & ex ipſa C Φ ad Φ f, quam vidimus eſſe, ut rectangulum C Φ G ad ſpatium G C Φ; itemque cùm C Φ ad Φ f ſit, ut rectangulum C Φ G ad f Φ G; igitur ſi fiat C Φ ad Φ f, ut parallelogrāmum circumſcriptum ſpatio Φ G C ad idem ſpatium, aut A Φ ad Φ f, ut rectangulum A Φ G ad idem ſpatium, aut applicetur ipſi Φ G dictum ſpatium, & faciat latitudinem Φ f, ſemper juncta A f erit tangens; ſed quorſum plura? præcipuæ ex his conſtructionibus, unde cæteræ pendent, geometricam confirmationem (ſi abſtracta hæc motuum conſideratio obſcurior, aut minùs tuta videatur) habebis infra, *cap.* 13. *num.* 2.

8 Eadem ferè applicari poſſunt aliis curvis ex circulari, & progreſſivo motu deſcriptis, quemadmodùm infinitæ Spiralium ſpecies, Conchoides diverſorum generum, Cycloides anomalæ P. Cevæ, & aliæ quamplurimæ [imò quid vetet, ubi commodum acciderit, figuram prorſus omnem ejuſmodi motibus compoſitam concipere, electo intra, aut extra ipſam

 quo-

quovis puncto, velut circularis motus centro, unde protenſi ad curvam rami radiorum elongationem, pro vario progreſſivi motus puncti per ipſos fluentis incremento, exhibeant?] illud tamen in his obſervandum, quòd ſicuti *cap.* 1. *num.* 12. ad geneſim Spiralis Geometricæ per convolutionem Logiſticæ, totus ejus axis in punctum contrahebatur, ordinatis ad æquales axis portiones in totidem ramos æqualibus angulis divaricatos abeuntibus, ita ad rem noſtram æquabilis motus lineæ per axem delatæ in circularem circa centrum commutandus eſt, deſcenſus verò puncti, aut progreſſus per ordinatas, debet in progreſſum puncti per curvæ ramos, ſeu radios figuræ converti; atque ut velocitas progreſſivi motus ad circularem, ita ipſe ramus, ſeu radius ſpiralis, alteriuſve figuræ præfato modo deſcriptæ, ad portionem lineæ ex centro perpendiculariter ad eumdem radium inſiſtentis, utpotè parallelæ tangenti arcus per circularem motum deſcripti, in qua eſt ipſius directio; hoc inſuper animadverſo, quòd circularis ille motus æquabilis eodem velocitatis gradu minimè pollet in ſingulis curvæ pun-

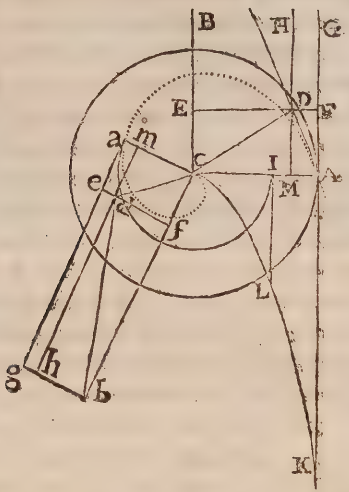


ctis, ſed pro varia puncti curvæ à centro diſtantia variatur, ut per ſe notum eſt, quippe non in eadem peripheria A L B verbi

bi gratia ſumitur circularis motus puncti a ſpiralis C a A, in qua ſumitur circulatio puncti A, ille quippe ſumendus in peripheria a I radio C a deſcripta, quem ſolum motum participat ſpiralis in puncto a.

9 Atque inde eſt, quòd ſubtangens quidem puncti A in ſpirali Archimedea poſt integram revolutionem radii C A æqualis eſt peripheriæ A L B A eodem radio deſcriptæ (exiſtente ſiquidem hic utroque motu æquabili, ipſorum velocitates ſunt, ut ſpatia eodem tempore percurſa, ut ſi velocitas progreſſivi motus ſit C A, velocitas circularis ſit ipſa C B ſubtangens æqualis peripheriæ eodem tempore percurſæ) at verò ſubtangens b c puncti alterius a eadem non erit, ac quæ ad dictam peripheriam ſit, ut C a ad C A, ut æquabilitas motus exigeret, ſed velocitate progreſſivi motus expreſſa per C a, velocitas motus circularis erit tantò adhuc minor, quantò propius centro eſt punctum a, ideſt, ut arcus I d a, quem eò uſque linea C a illo puncto deſcripſit, & cui propterea ſubtangens c b æqualis erit; itaque decreſcunt ſubtangentes in duplicata radiorum ratione, quia ſemel ob diminutionem radii, & ſemel adhuc ob pariformem diminutionem circularis velocitatis, atque adeò vertice C deſcripta parabola A L K, ductiſque A K, I L ejus axi parallelis, erunt hæ ad invicem, ut ſubtangentes radiis helicis C A, & C a (æqualis C I) reſpondentes; quòd ſi Spiralis ejus generis fuerit, ut ſpatia A C, a C motu progreſſivo percurſa ſint in ſubduplicata temporum, aut arcuum circulari motu æquabiliter percurſorum ratione, manifeſtum eſt progreſſivam celeritatem puncti A, vel a ſubduplam fore ejus, quæ fuerat in prima Spirali, & exponendam per ſemiſſem radiorum C A, vel C a, ſi eadem retineatur linea exponens celeritatem æquabilis circulationis, aut ſi illa exponenda ſit per integras lineas C A, C a, æquabilem celeritatem exponendam fore per priorum ſubtangentium duplas; erit igitur in hoc caſu ſubtangens C B dupla circumferentiæ A L D A, & ſubtangens C b dupla arcus a d l, qui ex tribus capitibus minor erit illa circumferentia, nempe in duplicata radiorum ratione, & in earumdem ſimplici adhuc decremento ob approximationem centri, unde parabola cubica C L K deſcripta, in

qua axi parallelæ K A, L I ſint in triplicata radiorum A C, C I ratione, ſive ut eorumdem cubi, erunt ipſæ axi parallelæ, ut ſubtangentes ad correlativa curvæ ſpiralis puncta; ſimiliter in aliis Spiralium ſpeciebus, ac parabolis per ordinem correſpõdentibus procedere potes; quod innuiſſe juvabit ad comparandas Spirales curvas cum congruis curvis parabolicis, uti

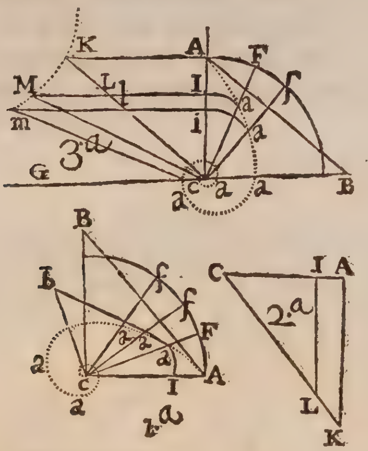


aliàs facturi ſumus, oſtendendo, quòd ſi A K ſit æqualis $\frac{1}{2}$ circumferentiæ A L D in prima Spirali, aut $\frac{2}{3}$ ejuſdem in ſecunda, aut $\frac{3}{4}$ in tertia, $\frac{4}{5}$ in quarta, &c. prima parabola exiſtente quadratica, ſecunda cubica, tertia quadratoquadratica, &c. Lineæ, ſpiralis, & parabolica æquales erunt; Imò et ſi motus circularis & ipſe æquabilis non fuerit, ſed acceleratus, congruæ parabolæ nihilominus reperientur earumdem nempe poteſtatum in axe, & ordinatis, quot fuerint in reſpondentis Spiralis circumferentia, & radio, ſed ordinatis parabolæ ad tantò plures gradus elevatis, quot fuerint unitates in exponente poteſtatum axis, neque enim difficilior eſt ſubtangentium & ad has Spirales determinatio, faciendo ſemper, ut velocitas

pro-

progreſſiva ad circularem, ita AC, vel aC ad ſubtangentem CB, aut Cb ex centro perpendiculariter ductam ad ſuum radium, uti pluribus explicare ſuperfluum eſt.

10 In Spirali Geometrica, quoniam ex dictis *cap.* 1. *n.* 12. illa per convolutionem Logiſticæ deſcribitur ad maximum radium CA poſita CB ſubtangente æquali ſubtangenti ejuſdem

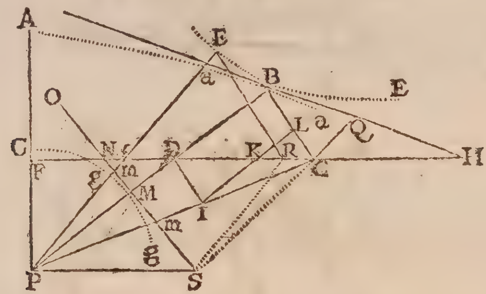


Logiſticæ, quæ convolvitur, aliæ ſubtangentes Cb tantò minores prima CB faciendæ ſunt, quantò minor eſt Ca ob rationem in fine *num.* 8. indicatam, quia in ipſa evoluta Logiſtica ſubtangens cujuſvis ordinatæ ſemper eadem eſt, ut ſupra oſtendimus, & mox poſt illuſtratam hanc methodum oſtenſuri ſumus; atque inde eſt, quòd triangula CAB, Cab ſemper ſimilia ſunt, anguli que à radiis, & tangentibus æquales, totaq; curva AaC æqualis tangenti AB, & aaC tangenti ab, &c. imò univerſaliter, ſi curva quælibet convolvi in Spiralem intelligatur eo modo, quo de Logiſtica citato loco expoſuimus, ſubtangentes radiorum quorumlibet Spiralis erunt tantò minores, quàm forent ſubtangentes reſpondentium æqualium ordinatarum evolutæ, quantò propiora centro ſunt puncta extrema dictorum radiorum, quàm punctum extremum maximi radii, quo vides nedum Helicis Archimedeæ, aliarumque

di-

diverſorum graduum, per convolutiones, trianguli, parabolæque, quadraticæ, cubicæ, &c. genitarum, tangentes determinari cohærēter ad dicta numero ſuperiori, ſed infinitarum propè aliarum Spiralium, quæ ex quavis figura ſic convoluta oriri poſſunt..

11 Non raro autem juvabit duorum in eodem radio punctorum motum invicem comparare, quorum alter cognitus ſit, alter certam ad illum proportionem obtineat: exemplo res clarior fiet. Eſto Nicomedea Conchois A a B, polo P, regula F H deſcripta, intervallo A F, cui æqualis ſupponatur



G P radius circuli G g M, & quæratur tangens puncti B; juncto ramo P B ſecante prædictum circulum in M, regulam in D, conſidero curvam A a B genitam ex circulari motu lineæ P A circa P, & ex progreſſivo puncti A per ipſam P A ita aſcendentis, ut non obſtante ejus inclinatione ad regulam F H, ipſum punctum eamdem ſemper à regula diſtantiam obſervet, ſit nempe F A ſemper æqualis D B; progreſſus igitur puncti A venientis in B, nempe exceſſus P B ſupra P A idem erit, ac exceſſus P D ſupra P F; eadem igitur velocitas erit hujus progreſſivi motus, atque illa quam haberet punctum F, ſi in circulatione lineæ P F ita per ipſam aſcenderet, ut ſemper reperiretur in regula F H, eamque re ipſa deſcriberet. Velocitas autem circularis in deſcriptione Conchoidis erit ad punctum B tantò major, quàm circularis velocitas in deſcriptione rectæ F H ad punctum D, quantò major eſt B P, quàm P D. Ducta igitur tangente circuli S M O, atque huic parallelis D I,

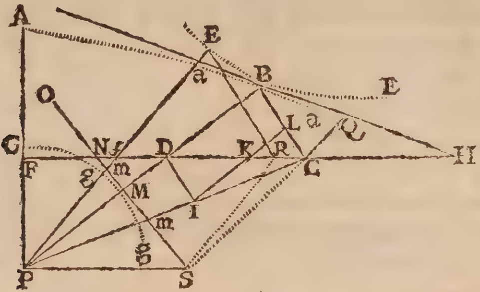
B C,

B C , junctaque P I C , ducatur ramo P B parallela I K, occurrens regulæ in K, atq; eidem parallela C Q æqualis ipſi I K. Juncta Q B erit tangens quæſita ; motus ſiquidem per D K componitur ex motu per D I parallelam tangenti *M* S, quæ circularis motus directionem exhibet, & ex motu per I K parallelam P D, in qua eſt motus progreſſivus ; ſed & motus per A a B componitur ex eodem progreſſivo, qualem exhibet linea C Q æqualis,& parallela ipſi I K,& ex circulari in eadem directione, ſed tantò majori,quantò longior eſt B P,quàm D P, adeòque optimè exprimendum per B C, quæ ad D I in eadem ratione reſpondet ; igitur juncta Q B dabit directionem motus ex utroque compoſiti ; ideſt tangentem ad punctum B . Simili modo etiam Subconchoidis (ſic voco curvam, ad quam ſunt puncta abſcindentia ex ramis P F, P D infra regulam æqualia intervalla) aliarumque ſpecierum in infinitum curvarum Conchilium, & Subconchilium, cùm ſcilicet abſciſſa ex ramis, vel ſupra, vel infra regulam intervalla, non quidem radiis P *M* quadrantis circularis æqualia ſunt , ſed ſubtenſis, ſeu ramis P *M*, P g alterius cujuslibet figuræ G *M* g (quomodo ſi hæc ſit ſemicirculus circa diammetrum P F, habebitur infra regulam Ciſſois Dioclea in infinitum continuata, quam propterea ad genus Subconchilium revoco) tangentes expeditè dabuntur, quas etiam geometricis demonſtrationibus cõfirmare, & generali quadam conſtructione exprimere in promptu eſſet, niſi verendum foret, ne longiùs ab inſtituto digrederer; itaque ſolam primariæ Conchoidis geometricam demonſtrationem, ex qua Lector, ſi acuto pollet ingenio, facilè ſibi cæteras cõparabit, in medium afferam, quæ quidẽ eſt hujuſmodi.

12 Supponatur B C concurrere cum regula in C (poteſt enim tum B C, tum D I cujuslibet longitudinis eſſe, dummodò intra ramum P B, & junctam P C contineantur) ducto autem quovis alio ramo P a, ſecante regulam in f, ponatur f E æqualis, non quidem radio P g, ſed P m ſecanti anguli *M* P g, & ſic ubique fiat, ut habeatur curva E B E, quam manifeſtum eſt tangere Conchoidem in B, quia, cùm P m ſemper major ſit radio P g, etiam f E major erit intervallo Conchoidis f a,

pun-

puncta igitur E ſemper ſunt ſupra puncta a Conchoidis ; ut igitur obſervat verus Geometra in Recreatione Geometrica, quæ linea recta tanget curvam E B E, eadem tanget Conchoidem a B a, propter angulum contingentiæ ſemper indiviſibilem, minoremque [ut dici ſolet] quovis angulo rectilineo;

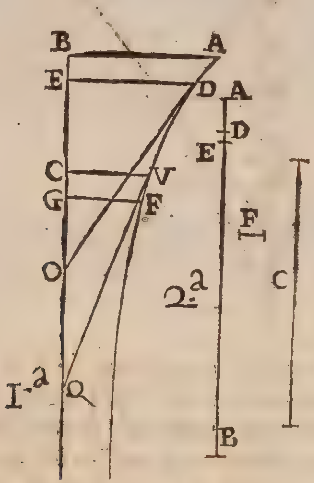


jam verò oſtendemus curvam E B E eſſe hyperbolam intra aſymptotos H N O, ejuſque tangentem eſſe ipſam B Q convenientem cum regula in H; quia ducta P S regulæ parallela, occurrente tangenti M S in S, ob triangula ſimilia D B C, P M S, quorum latera B D, P M ſunt æqualia, æquales etiam erunt baſes D C, P S, unde juncta S C æquidiſtabit ipſi D M; quare C N ad N S erit, ut D N ad N M, ſeu ut P S ad S M, vel C B, adeòque rectangulum N C B æquale erit ipſi N S P; eodem modo ducta E R ipſi B C parallela oſtendetur junctā S R æquidiſtare ipſi m f, adeòque N R E æquale eſſe eidem N S P; æqualia igitur cùm ſint rectangula N C B, N R E curva E B E erit hyperbola intra angulum H N O; cùmque ſit N C ad C D, ut M B, ſeu P D illi æqualis ad B D, ideſt (extenſa I K ad B C in L) ut B L ad L C, ſeu I K ad K L, nempe C Q [æqualis ex conſtructione ipſi I K] ad exceſſum D B ſupra C Q, aut denique ut C H ad eamdem C D, erit N C ipſi C H æqualis; ergo H Q B hyperbolam in B tangit, & conſequenter Conchoidem : quod nobis propoſitum erat demonſtrare.

13 Jam tandem, ut promiſſam Theorematis IV. Hugeniani demonſtrationem ex ea, quam propoſuimus, methodo

ab-

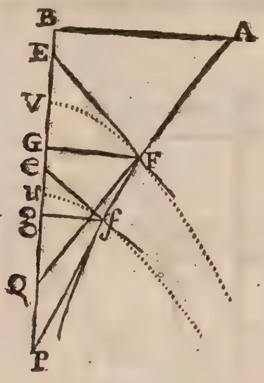
abſolvamus; ſi in Logiſtica fiat, ut velocitas puncti A illam deſcribentis, juxta geneſim *cap.* 1. *num.* 5. indicatam, ad æquabilem velocitatem lineæ A B per axem delatæ, ita A B ad B O, conſtat ex dictis *num.* 3. atque hactenus abundè illuſtratis, junctam A O eſſe tangentem; ſimiliter ſi fiat, ut eadem æquabilis velocitas ad velocitatem puncti fluentis in V, ita Q C ad C V,



juncta V Q tanget; habebit igitur velocitas in A ad velocitatem in V rationem compoſitam ex A B ad B O, & ex C Q ad C V, ſive erit, ut A B in C Q ad B O in C V; ſed eædem velocitates ex dictis tum *cap.* 1. *num.* 3. tum indicatis hìc *n.* 6. ſunt etiam ut B A ad C V, omnes quippe ordinatarum æquo intervallo diſtantium differentiæ ſunt ipſis totis ordinatis proportionales, igitur A B in C Q ad B O in C V eſt ut A B ad C V, quare ſubtangentes B O, C Q ſunt æquales. Quod erat demonſtrandum.

14 Hinc obiter colligere poſſumus, quòd ſi parabola, cujus parameter dupla fuerit parametri Logiſticæ, circa eumdem axem conſtituta fuerit, aut juxta ipſum axem flue-

re concipiatur, in quovis ſitu alteram altera ad rectos angulos ſecabit, putà parabola V F, cujus parameter dupla ſit ſubtangentis Logiſticæ G Q, & ad communem cum ipſa axem conſtituta, aut juxta ipſum fluens, utraque ſe interſecante in



puncto F, aut f, angulus curvarum V F A, aut u f A ſemper erit rectus; Cùm enim intercepta G Q inter ordinatam, & Q F perpendicularem parabolæ, ſit dimidia ſuæ parametri, demōſtrante id Vero Geometra in Clariſſ. de Max.& Min. Op. erit in hoc caſu æqualis ſubtangenti Logiſticæ; ergo Q F tangens Logiſticæ, ideſt ipſamet curva A F erit perpendicularis parabolæ V F, & è contra tangens E F parabolæ, ſeu ipſa curva parabolica V F erit perpendicularis tangenti Logiſticæ Q F, ſeu curvæ A F in puncto quovis ſibi occurrant.

CA-

CAPUT VI.

Quintum Theorema proponitur, quod ut demonſtretur, oſtenditur, hyperbolica ſpatia parallelis aſymptoto proportionalibus definita æqualia eſſe; ſpatia quælibet eam inter ſe rationem habere, quam extremarum ordinatarum rationes. Axi Logiſticæ parallelæ inter ſe ſunt, ut Hyperbolica ſpatia iis reſpondentia. In Geometrica Spirali, arcus, & ſectores circulares ejus ramis interjecti, proportionantur ſpatiis, & ſectoribus hyperbolicis reſpondentibus. Subtangens Logiſticæ ad quamvis axi parallelam eſt, ut parallelogrammum hyperbolæ inſcriptum ad ſpatium hyperbolicum. Demonſtrandi modus à ſcrupulis vindicatur. Propoſitio univerſalior redditur. Quid ſit facere Univerſale. Prima Geometricæ Spiralis ſubtangens eſt ad arcus circulares, ut hyperbolæ parallelogrammum ad hyperbolica ſpatia. Spatia hyperbolica, aut ſectores hyperbolici in ea ſunt ratione ad circulares ſectores correſpondentes, in qua minima ordinatarum hyperbolę ad ſemiſſem ſubtangentis Logiſticæ. Parallelogrammum hyperbolæ inſcriptum ad ſpatium ordinatis duplæ proportionis interjectum eſt proximè, ut 10. ad 7. Quinti Theorematis Hugenii demonſtratio.

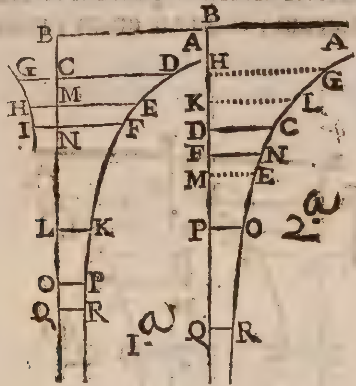
1 LOngiùs in præcedenti capite progreſſi fuimus, quàm ab initio ſperabamus: habenæ ideò contrahendæ in præſenti, in quo Quintum Hugenii Theorema nobis demonſtrandum proponimus. *Hæc longitudo*, inquit de ſubtangente, *per*

approximationem reperitur, eſtque ad partem aſymptoti interjectam ordinatis proportionis duplæ, ut 43429448190325 1804 *ad* 30103999566398 1195, *ſeu proximè, ut* 13 *ad* 9. Quia tamen infiniti penè laboris, ac tedii eſſet longiſſimos hos Hugenii numeros perſequi, neque ad manum Tabulæ Logarithmicæ ad tam multiplices notas extenſæ occurrunt, quibus veriſimile eſt uſum Hugenium ad ejuſmodi calculum expediendum, ideò eumdem lapidem alia methodo movere aggrediar, majorique tum compendio, tum emolumento, vel ad hanc ipſam, vel ad aliam huic propinquam dictarum linearum proportionem intelligendam Lectorum mentes diſponam.

2 Præmittendum igitur, quòd Hyperbolæ, & Aſymptoto interjecta ſpatia, alteri aſymptoto parallelis proportionalibus terminata, invicem æqualia ſunt; id quidem Gregorius à S. Vincentio Magnus ſuperioris ſæculi Geometra, ſuæque Societatis Lumen Ampliſſimum, primus, quòd ſciam, oſtendit, quia tamen nec mihi, nec pleriſque fortaſſe Lectorum meorum, ejus Codex ad manus eſt, placet demonſtrationem hanc cōcinnare. Eſto, *fig.* 1 *ſeq. Schem.* aſymptotis A B Q interjecta hyperbola D E R, aſſignenturq; ſpatia D C N F, K L Q R definita extremis lineis D C, F N, & K L, Q R alteri aſymptoto parallelis, invicem verò proportionalibus. Dico ejuſmodi ſpatia invicem æqualia eſſe; ex natura ſiquidem hyperbolæ erunt etiam B C, B N, B L, B Q proportionales, utpotè iiſdem parallelis reciprocè reſpondentes; earumque differentiæ C N, L Q homologis terminis B C, B L, aut L K, C D itidem proportionales. Ordinetur ergo ad C N ipſa C G æqualis L K, & ipſa N I æqualis Q R, atque inter duas C B, B N, ſumpta media proportionali B M, ordinetur M E; ſimiliter inter duas B L, B Q ſumpta media B O, ordinetur O P, cui æqualis ponatur M H; atque ita porrò ſumptis aliis intermediis inter B C, B M, ac B L, B O; inter B M, B N, ac inter B O, B Q ordinatæ ad extrema talium mediarum in ſpatio K L Q R trāſferantur, & applicentur extremis dictarum mediarum in linea C N exiſtentium, quoadusque fiat ſpatium C G H I N, cujus ordinatæ ſunt æquales ordinatis ſpatii K L Q R, ſed applicatæ ad partes altitudinis C N proportionales partibus al-

ti-

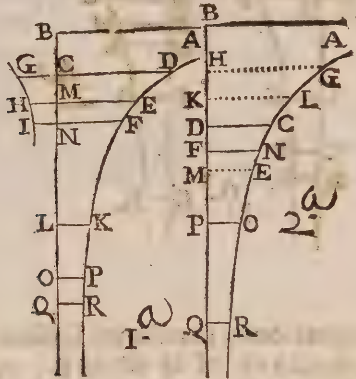
titudinis L Q; nec enim dubium, quin N M ad M C ſit, ut Q O ad O L, utpotè differentiæ trium continuè proportiona-



lium ejuſdẽ utrobiq;rationis; (exiſtente ſcilicet N B ad B M, ut B M ad B C, dividendo eſt N M ad M B, ut M C ad C B, & alternando N M ad M C, ut M B ad C B, aut O B ad L B, ideſt, eadem ratione, ut Q O ad O L) idemq; de aliis intermediis dicendum. Jam ſic: ſpatium D C N F ad K L Q R rationem habet compoſitã ex D C N F ad C G I N, & ex C G I N ad K L Q R. Sed prima ratio eadem eſt, quæ D C ad C G, vel K L (cæteræ enim ordinatæ E M, & M H, ſeu P O; F N, & N I, ſeu Q R, aliæque intermediæ eamdem perperuò rationẽ obſervant) ſecunda autem ratio eadẽ eſt, quæ altitudinis C N ad L Q (per demonſtrata prop. 1. append. noſtræ Probl. Vivian.) hoc eſt, ex ſupra dictis, eadẽ, quæ ejuſdem L K ad C D; igitur ratio ſpatii D C N F ad K L Q R componitur ex D C ad L K, & L K ad ipſam D C, ſcilicet eſt ratio æqualitatis. Quod erat demonſtrandum.

3 Hinc facillimè deducitur, ſpatia quævis hyperbolæ, & aſymptoto interjecta, lineiſque alteri aſymptoto parallelis concluſa eſſe ad invicem, ut ſunt rationes extremarum ordinatarum, quibus concluduntur; ſpatia nimirum C D F N,

OPQR, *fig.* 2. ita comparata ſint, ut ratio CD ad NF æqualis non ſit rationi OP ad QR, ſed in alia quavis proportione, putà altera alterius triplicata, aut duplicata, vel ſeſquialterata, &c. erit pariter alterum ſpatium alterius triplum, duplum, aut ſeſquialterum; ſumpto enim rationis CD ad FN

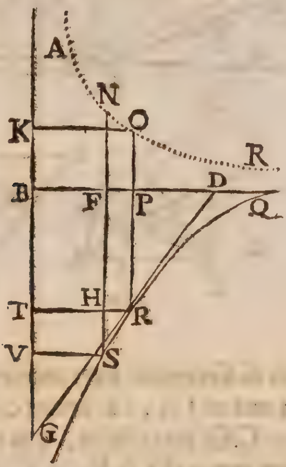


quovis multiplici, putà ratione GH ad NF triplicata ipſius CD ad NF (ideſt ipſis FB, DB, ſumptis aliis duabus continuè proportionalibus KB, HB, erectiſque ordinatis KL, HG) conſtat ſpatium GNFH æquè multiplex fore ſpatii CDFN (ob ſingula ſpatia GK, LD ipſi CF æqualia ex *num. præced.* quippe lineis proportionalibus terminata.) Similiter rationis OP ad QR ſumpta quavis multiplici, putà duplicata, EM ad QR (ideſt ipſis QB, PB ſumpta tertia proportionali BM, atq; erecta ME) patet ſpatium ERQM æquè multiplex, ſcilicet duplum fore ſpatii OPQR, quandoquidem EP æquabitur ex *num. præced.* ipſi OQ. Quod ſi ratio GH ad NF æqualis foret rationi EM ad QR, ſpatium quoque GHFN æquaretur ſpatio EMQR, ſi illa major, & hoc majus, ſi ratio minor, & ſpatium minus (ut patet, aut apertè deducitur ex *præcedenti*) itaque, ex nota pro-

por-

portionalium definitione Euclidea, erit ratio linearum C D, & N F ad rationem linearum O P, & Q R, ut ſpatium prioribus cōcluſum C D N F ad ſpatiū poſterioribus interjectū O P Q R. Quod erat demonſtrandum.

4 Unde apertè colligitur, quòd, ſi ordinatæ Logiſticæ adhæreat præmiſſa figura hyperbolica linea N O R, atque aſymptotis B Q, B A interjecta, quarum illa ordinata, hæc axis

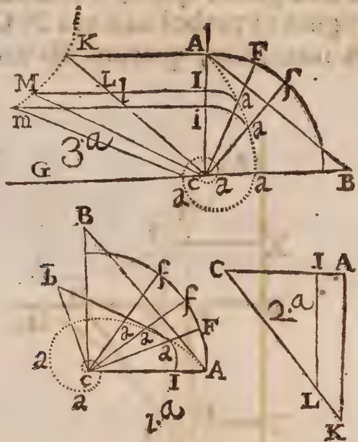


Logiſticæ fuerit, producanturque ipſæ N F, O P ad Logiſticam in S, R, erit ſpatium hyperbolicum N R Q F ad ſpatiū O R Q P, ut axi Logiſticæ parallelæ, F S, & P R; cùm enim dicta ſpatia ſint ad invicem, ut rationes inter F N, Q R, & inter O P, Q R intercedentes, ut *num. præced.* oſtenſum eſt, ſive ut rationes inter Q B & BF, vel V S, & inter Q B, ac B P, ſeu T R intercedentes, quæ quidem rationes ex dictis *cap.* 1. *num.* 3. ſunt, ut portiones axis iiſdem ordinatis interceptæ, V B, T B, ſeu S F, R P, etiam dicta ſpatia Hyperbolica N F Q R, O P Q R erunt, ut lineæ S F, P R. Quod erat demonſtrandum.

☞ *Supple in Diagrammate lineam Q R ipſi N F parallelam, claudentem ſpatium hyperbolicum.*

5 Si-

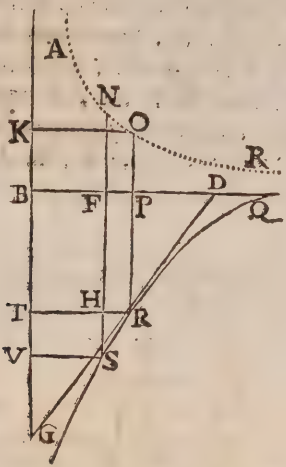
5 Simile quidpiam accidit Spirali geometricæ A a a, in qua arcus, aut ſectores per radios ſpiralis abſciſſi, veluti A F, A f, aut A C F, A C f ſunt, *fig. 3. h. Schem.* ut hyperbolica ſpatia A I M K, A i m K comprehenſa portionibus A I, & A i aſym-



ptoti A C, quibus differentiæ extremorum ramorum a F, a f ſint æquales [ſunt enim I A, i a arcus concentrici ipſi A F f] & alteri aſymptoto C G parallelis, curvaque hyperbolica iis intercepta; etenim arcus illi A F, A f, & conſequenter & ſectores A C F, A C f iis reſpondentes, ex dictis *cap.* 1. *nu.* 10. ſunt, ut rationes radiorum Spiralis A C, a C, ſeu A C, & C I, A C, & C i, in qua pariter ſunt dicta ſpatia hyperbolica; cùmque ductis ex centro C rectis C K, C M, C m (debent enim hæ lineæ in centrum convergere, utut in Schemate, vitio Sculptoris, exorbitent) ſector M C K ipſi ſpatio K A I M, & ſector m C K ſpatio m i A K ſit æqualis (ab æqualibus quippe triangulis K C A, M C I ablato communi C L I, additoque utrique reſiduo M L K res eſt perſpicua) habebimus ſectores hyperbolicos in eadem ratione ſectoribus circuli ordinatim reſpondentes, erit enim M C K ad m C K, vel ad m C M, ut A C F, ad A C f, vel F C f.

6 Col-

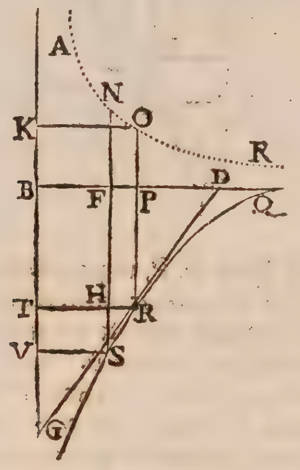
6 Colligi intereà ex ſupra dictis poteſt, quòd ſubtangens, ſeu parameter Logiſticæ eſt ad quamvis axi parallelam, ut parallelogrammum hyperbolæ inſcriptum ad congruum ſpatium hyperbolicum, ſcilicet ad punctum R Logiſticæ ducta tan-



gente R G, erit G T ad R P, ut parallelogrammum K O P B ad ſpatium O P Q R; ſumatur enim tangentis portio R S infinitè parva, ita ut ducta parallela ordinatæ S V, parallela axi S H N occurrente hyperbolæ in N, tum ipſa tangens R S ferè coincidat cum curva R S; necnon H S, ut terminata ad curvam ferè æqualis ſit eidem, ut terminatæ ad tangentem; ideſt habeat ad ipſam rationem propiorem æqualitati, quàm quælibet data majoris inæqualitatis ratio quantumlibet parva, tum etiam hyperbolicum ſpatium N F P O ferè cum rectangulo O P F coincidat, ſeu illud excedat minori exceſſu quolibet dato: conſtat ex *nu.*4. & dividendo, fore ſpatium N F P O ad O P Q R, ut H S ad P R, & ſumptis antecedentium æquè proportionalibus, parallelogrammo K P, & linea T G (eſt enim K P ad O P F ferè cum ſpatio P N coincidens, ut B P ad P F, ſeu T R ad R H, vel T G ad H S, prout termina-

tam ad tangentem, quæ ferè coincidit cum terminata ad curvam in S) erit parallelogrammum KP ad ſpatium OPQR, ut TG ad PR. Quod erat demonſtrandum.

7 Si cui videatur audacior præcedentis demonſtrationis proceſſus, ſimulque infirmior, quàm ut aſſenſum extorqueat, is demonſtratione apagogica utatur, per me licet, imò ut huic & ſimilibus applicare diſcat, ſpecimen hìc dabo. Fingat ſibi quis minorem eſſe, ſi fieri poſſit, alterutram dictarum rationum, verbi gratia ratio GT ad PR minor eſto ratione KP ad ſpatium OPQR, itaut illi adjicienda foret ratio alia majoris inæqualitatis, quæ ſit inter *c*, & *d*, ad hoc ut huic alteri rationi æqualis evadat. Cùm itaque ratio PR ad HS (ut



terminatam ad curvam) ſit poſtea eadem, quæ OPQR ad ſpatium NP, erit ruſſus ratio TG ad eamdem HS minor quàm ratio KP ad ſpatium NP, eodẽ defectu rationis *c* ad *d*; poteſt autem HS terminata ad curvam eſſe ad HS, ut terminatam ad tangentem in ratione minori, quàm quælibet data ratio *c* ad *d*; ſi igitur rationi TG ad HS priorem addatur ratio HS prioris ad HS poſteriorem, fiet ratio TG ad HS

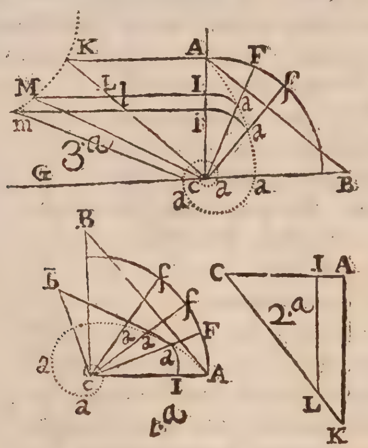
po-

poſteriorem, hoc eſt T R ad R H, vel K P ad rectangulum O P F, adhuc minor, quàm ſit ratio ejuſdem K P ad ſpatium N P; quod eſt impoſſibile, foret enim rectangulum O P F majus ſpatio N F P O, cui inſcribitur. Si verò dicatur è contra ratio K P ad ſpatium O Q minor altera ratione T G ad P R, fiet eadem demonſtratio, incipiendo ex parte ſpatiorum, unde concluderetur, quòd H S terminata ad tangentem major foret, quàm H S terminata ad curvam, ſeu quòd tangens curvã ſecaret. Nullus igitur eſſe poteſt in ratiocinio noſtro ſcrupulus, nec de fallacia inſimulari debet, ſed de compendio laudari.

8 Intereà notandum velim, præmiſſam demonſtrationem nõ pendere ab ulla ſive Hyperbolæ, ſive Logiſticæ proprietate, ſed hinc dumtaxat, quòd ſpatia hyperbolica proportionalia ſint parallelis axi Logiſticæ; quæ affectio infinitis curvis invicem comparatis communis eſſe poteſt; ut ſi F Q N ſit triangulum apicem habens in Q, & F Q S trilineum parabolicum; utique axi parallelæ erunt, ut interceptarum F Q, P Q quadrata, ſive ut ſimilia ſpatia triangularia his inſiſtentia; ſi ſuperior figura ſit trilineum parabolicum quadraticũ, inferior erit parabolicum cubicum, & ſic de aliis, tum parabolarum ſpeciebus, tum curvarum generibus; quocirca eamdem demonſtrationem iis applicare potes, aut univerſaliùs ipſum Lemma concipere ſic. In qualibet curva Q R S, cujus ordinatæ P R, F S (ſumpto F Q pro axe) ſint in eadem ratione cum ſpatiis P O R Q, F N R Q per eaſdem ordinatas abſciſſis ex figura N R Q F eidem axi applicata, erit ſubtangens G T ad P R, ut rectangulum, ſeu parallelogrammum O P B ad ſpatium O P Q R; & converſim, ſi ut illud parallelogrammum ad hoc ſpatium, ita fuerit P R, ſeu B T ad T G, juncta G R erit tangens; nec refert cava ne, an convexa ſint ſpatia, quæ comparanda ſunt, eadem quippe ratio ſemper militat, aut parùm certè immutata. Hinc aliam habes tangentium ducendi methodum, aliaſque, & alias veritates per te prudens Lector extundere poteris, ſed (quod majori in pretio habendum eſt) hinc diſces Veterum, & Recentiorum Geometrarum propoſitiones Univerſaliores reddere, attendendo, num proprieta-

tes, quas ſpecialiter de quadam figura demonſtrant ex peculiari ejus affectione pendeant, an verò ex communi pluribus Symptomate deriventur. Atque id revera eſt facere Univerſale, quod adeò deprædicant Metaphiſici, & an per intellectum, an verò, ut barbarè loqui ſolent, etiam à parte rei dari poſſit, exquirunt. Quod quidem ipſis integrè decidendum relinque mi Lector, atque ab ea ſollicitudine bonas horas aliis utilioribus ſtudiis debitas redimere ſatage; ſpondeo enim, aliquot ſæculorum myriadibus antequàm illi conveniant, & quod tot tricarum apparatu expiſcari contendunt in aperto ponant (uti hactenus certè incaſſum laboraſſe video, nec à tot ſæculis, vel latum unguem profeciſſe, aut aliquam ſaltem inde utilitatem in Philoſophicis, aut Theologicis rebus inde ſibi, aliiſve exculpſiſſe, plus nimiò expertus agnovi) Te innumerabiles, atque utiliſſimas veritates geometricas invēturum per illud, quod ſuperiùs deſcripſi, Geometricum Univerſale, ejuſdemq; applicationem ad multiplices figurarum ſpecies, quas aut Geometria miniſtrat, aut ſibi facilè unuſquiſque fingere poterit.

9 Nec intereà omittendum, quòd Spirali Geometricæ rurſus quid ſimile contingit, quod ipſi Logiſticæ, ſubtangens enim



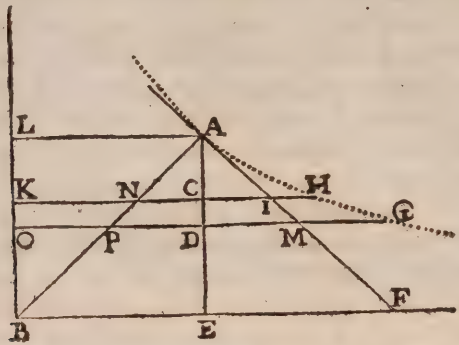
CB prioris radii AC eſt ad quemvis arcum AF, aut Af,

ut parallelogrammum hyperbolæ inſcriptum K A C ad ſpatiū correſpondens M I A K, aut m i A K, quod, tum eadem methodo probari poteſt, tum & de ſe patet, quum ex dictis *cap. præced. num.* 10. prima ſubtangens C B ſit eadem, quæ erat ſubtangens Logiſticæ, ex cujus convolutione, juxta dicta *cap.* 1. *num.* 12. Geometrica Spiralis gignitur, ordinatis in radios commeantibus, & axis portionibus, ejuſve parallelis in arcus curvatis, ac propterea eadem erit ipſius C B ad arcum A F ratio, quæ priùs erat ſubtangentis ad parem axis portionem, ejuſve parallelam, adeòque eadem, quæ parallelogrammi prædicti ad aſſignatum hyperbolicum ſpatium.

10 Exinde autem habetur, quòd ſpatia illa hyperbolica, aut ſectores iis æquales, de quibus *num.* 5. in ea ſemper ratione erunt ad correſpondentes circulares ſectores, in qua minima ordinatarum ſpatii hyperbolici A K ad ſemiſſem ſubtangentis C B; etenim ſi A K ſupponatur æqualis dictæ ſubtangenti C B, erit ut rectangulum K A C ad ſpatium hyperbolicum K A I M [quod ſumi poterit latitudinis A I infinitè parvæ, ut ferè coincidat cum inſcripto rectangulo K A I] idest ut C A ad A I, ita ipſa K A, vel ipſa C B ad arcum A F, ex numero ſuperiori; rectangulum igitur K A I, ſeu ſpatium ipſum hyperbolicum M I A K erit æquale rectangulo radii C A in arcum A F, hoc eſt duplum ſectoris A C F; cùmque ex dictis *num.* 5. & alii ſectores aliis ſpatiis in eadem ſint ratione, ſingula ſpatia K A I M, K A i m, aut hyperbolici ſectores K C M, K C m, dupli erunt reſpondentium ſectorum circularium A C F, A C f; & ſi A K æqualis fuerit ſemiſſi C B, erunt dicta ſpatia, & ſectores hyperbolici ad circulares ſectores in ratione æqualitatis; ſi quis autem obrepſerit ſcrupulus circa hanc demonſtrationem, remedio numeri ſeptimi ritè applicato amoliendus erit.

* *Nota, demonſtrationem horum numerorum* 9. *&* 10. *appellare figuram* 3. *Diagrammatis appoſiti proximo num.* 9. *in adverſa pagina.*

11 Jam oſtendendum eſt, quòd parallelogrammum Aſymptotis, & Hyperbolæ inſcriptum eſt ad ſpatium hyperbolicum, cujus extremæ ordinatæ duplam proportionem ſervent, proximè ut 10 ad 7. Eſto A L B E quadratum hyperbolico



ſpatio, quod hyperbola A G, aſymptotis L B F continetur, inſcriptum; & ſumpta F E æquali ipſi E B, ordinetur F G: erunt ordinatæ A E, F G in ratione dupla. Dico quadratum E L ad ſpatium A H G F E (adeòque & quodvis parallelogrammum hyperbolæ inſcriptum ad ſpatium ordinatis rationis duplæ interjectum) eſſe proximè, ut 10 ad 7. ducta enim diametro B A, & juncta A F (quæ tangens erit, quoniam extenſa ad alteram aſymptoton bifariam ſecaretur in A, prout B F bifariam ſecaretur in E) ductaque G D, & H I C N K aſymptoto B F parallelis; quoniam rectangula A L B, H K B æqualia ſunt, & communi ablato B E C æqualia remanent E C H, K C A, erit H C ad C A, vel C I (ob angulum E A F ſemirectum) ut K C, ſeu E A ad E C, & dividendo, H I ad C I, vel C A, ut C A ad C E; cùm igitur ſint E C, C A, I H continuè proportionales, erit tertia I H æqualis quadrato ſecundæ C A diviſo per primam C E; itaque ſi E A dicatur æqualis a, & quælibet portio A C dicatur c, erit H I æqualis $\frac{cc}{a-c}$; intelligatur ergo A E in 100. æquales particulas di-

vi-

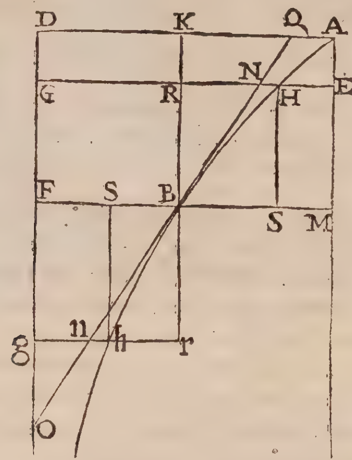
☞ *Supple in Diagrammate lineam F G ipſi A E parallelam, claudentem ſpatium hyperbolicum.*

vidi, quarum A D erit 50, & ſi ab A ſumantur per ordinem 1, 2, 3, &c. ejuſmodi particularum, & calculo exprimantur lineæ in trilineo A M G reſpondentes, prout H I correſpondet ipſi A C, invenietur hæc ſeries $\frac{1\times1}{100-1}$, $\frac{2\times2}{100-2}$, $\frac{3\times3}{100-3}$, &c. uſque ad $\frac{50\times50}{100-50}$; hæc enim eſt expoſitio univerſalis expreſſionis ſuprapoſitæ $\frac{cc}{a-c}$ pro diverſo valore ipſius c; ideſt rectæ illæ, velut I H, in trilineo A M G parallelæ, & ad centeſimas quaslibet ipſius A E partes applicatæ, erunt per ordinem $\frac{1}{99}$, $\frac{4}{98}$, $\frac{9}{97}$, &c. uſque ad $\frac{2500}{50}$, quod æquatur ipſi M G 50 ejuſmodi particularum. Summa igitur harum omnium fractionum deſignabit proximum valorem, ſeu quantitatem trilinei A M G, reſpectu quadrati A E B, quod eſt in hac ſuppoſitione 10000; porrò illæ fractiones ad minimos terminos redactæ, & ſimul additæ dant circiter 700 (ut experiri unuſquiſque poterit, ſi ſatis otii, & patientiæ habuerit ad calculi laborem ferendum) triangulum verò A D M æquatur dimidio quadrati A D, ſcilicet 50 ducto in 25, quod eſt 1250 & parallelogrammum G D E F, quadrati A E ſubduplum, eſt 5000, igitur ſumma ex trilineo, triangulo, & parallelogrammo, nempe ſpatium hyperbolicum A G F E eſt 6950, ut ex hac formula patet.

Trilineum A M G	700
Triangulum A D M	1250
Parallelogrammum G D E F	5000
Summa, ſpatium G A E F	6950

Proportio itaque ſpatii A G F E ad quadratum A E B L eſt eadem, quæ 6950 ad 1000, ſeu, dividendo utrobique per 50, ut 139 ad 200, quæ eſt circiter 140 ad 200, aut ſubdividendo per 20, ut 7 ad 10: & hoc fuerat demonſtrandum.

12 Jam V. Theorem. Hugenii demonſtrationē ſic expedio. Sit A D dupla D K, ſeu F B ordinatæ ad Logiſticā A B h; erit F D intercepta axis inter ordinatas duplæ proportionis; oſtēdendum eſt F O ſubtangentem, ſeu parametrum Logiſticæ



eſſe ad F D, vel B K proximè, ut 13 ad 9. Jam ex dictis *num.* 6. eſt F O ad B K, vel D F, ut parallelogrammum inſcriptum hyperbolæ ad congruum ſpatium hyperbolicum, quod in hoc caſu (ſi intelligatur ſuper A D deſcriptum, & ordinatis ex A, & K definitum) terminabitur ordinatis duplæ proportionis, propter A D duplam D K; ſed illud parallelogrammum ad tale ſpatium hyperbolicum ex *præcedenti numero* eſt proximè, ut 10 ad 7, ergo & O F ad D F, vel B K erit proximè in eadem ratione 10 ad 7, aut utrobique per 13 multiplicando, ut 130 ad 91, quod proximum eſt rationi 130 ad 90, hoc eſt 13 ad 9. Ratio igitur ſubtangentis ad axis portionem interceptam ordinatis duplæ rationis proximè eſt, ut 13 ad 9, uti Hugenius in hoc Theoremate propoſuerat.

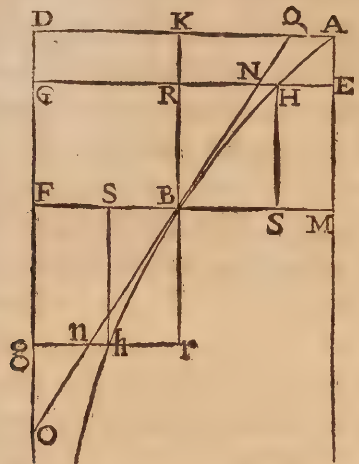
CAPUT VII.

Sextum Theorema proponitur, & univerſaliùs demonſtratur. Spatia Logiſtica in data ratione dividere; Cavum trilineum convexo æquale; rectangula ſpatiis Logiſticis æqualia. Item ſpatiis hyperbolicis. Ordinatæ in trilineo Logiſticæ, axi parallelæ, convexis, & cavis hyperbolæ ſegmentis proportionales. Eadem aliis figuris applicare. Hyperbolam ducere, quæ datam Logiſticam, vel in dato puncto contingat. Maximum parallelogrammum Logiſticæ inſcribere, & duo utrinque æqualia determinare. Data cujuſvis figuræ tangente maximum illi parallelogrammum inſcribere, & contra. Idem circa alia maxima præſtare per alias hyperbolas. Infinitarum hyperbolarum tangentes. Spiralis geometricæ ſpatia inter ſe, & cum ſuis partibus comparantur. Cujuſvis convolutæ figuræ, ejuſve partium ad circumſcriptum ſectorem, & ejus zonas proportio eadem, quæ Conoidis ab evoluta figura, ejuſve partium ad circumſcriptum cylindrum, & tubos cylindricos. Evolutæ ad convolutam ratio, quibus compoſita. Exempla in Spiralibus. Geometricæ Spirali doctrina applicatur.

1 PRopoſuit in Sexto Theoremate Hugenius, quòd, *ſi fuerint tres ordinatæ, velut in hac figura ſunt AD, HG, BF, & ex puncto curvæ ad minimam pertinente ducatur aſymptoto parallela ſecans duas alias ordinatas in R, & K, ac tangens BQ eaſdem ſecans in N, & Q; ſpatia trilinearia ABK, HBR*

K HBR

HBR ſunt inter ſe, ut partes ordinatarum inter curvam, & tangentem, ideſt, ut AQ, HN. Quod quidem ferè cum ſecundo Theoremate coincidit, poteſtque ex *cap.* 4. *num* 4. dictis demonſtrari, ut patebit, applicando demonſtrationem



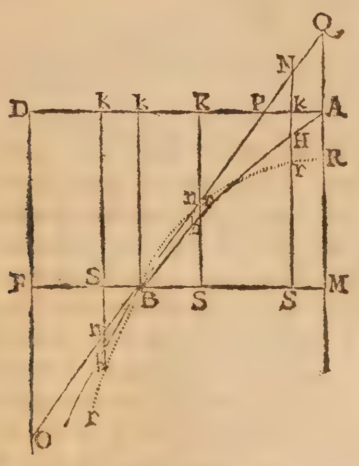
lineæ g h minuſculis litteris expreſsæ, ſecanti tangentem in n, axi parallelam per B ductam in r; patebit enim interceptas tangenti, & Logiſticæ curvæ, ordinatis parallelas, ſive infra, ſive ſupra punctum contactus eſſe, ut ſpatia comprehenſa iiſdem ordinatis, Logiſticæ curva, & axi parallela per contactum ducta, adeòque ſecundum, & ſextum Theorema in unum convenire.

3 Sic igitur argui poterit. Cùm ſit O F ad F B, ut B K ad K Q, erit O F in K Q æquale F B K rectangulo; ſed F O in B M, ſeu in totam K A æquatur toti ſpatio D A B F per *cap.* 4. *num.* 3. igitur F O in reſiduam Q A æquatur reſiduo ſpatio K A B: eodem modo oſtendetur O F in R N, ſeu r n æquale rectangulo F B R, F B r; adeòque cùm ſit H G F B, h g F B, æquale F O in B S, ſeu H R, vel h r, erit ſpatium R B H, r B h, æquale F O in N H, n h; adeòque trilineum A K B ad H R B, ſeu h r B, erit, ut A Q ad N H, ſeu n h, quæ ſunt baſes rectangulorum ſub communi altitudine ſubtan-

tangentis F O illis ſpatiis æqualium. Et hoc fuerat demonſtrandum.

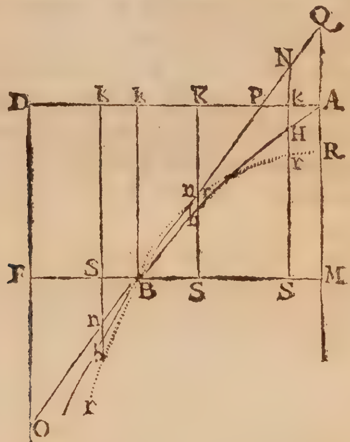
3 Hinc facile erit quævis Logiſticæ ſpatia, ſive concava, ſive convexa per ordinatas in data ratione dividere; ſpecialiter autem hinc inferre juvat, quòd ſi ex quovis puncto H Logiſticæ ducatur tangenti O N parallela occurrens curvæ ultra cõtactum in h (finge ductam, licet in Schemate deficiat) erit portio Logiſticæ concava H R B æqualis convexæ h r B, propter æquales H N, h n, iis parallelis interceptas; imò addito utrinque ſpatio B H S, cum rectangulo S B r, inferes rectangulum H R r æquale eſſe ſpatio Logiſticæ, curva H h, ipſaque H S ad h r extenſa, intercepto; indeque rectangulum G R r æquale reſiduo ſpatio G H B h g, æquale proinde & rectangulo ex O F ſubtangente in R H cum r h, ſeu in s S, adeòq; O F ad G g ſe habere, ut G R, ſeu B F ad s S; ſed nimiùm minutis detineor.

4 Expendere potius juvabit, quibus ſpatiis proportionales ſint lineæ in trilineo N B H, aut n B h, parallelæ, non quidem



ordinatis, ſed ipſimet axi. Inter aſymptotos A D, D F ducatur per ipſum punctum B Logiſticæ hyperbola r B r r R; ante omnia oſtendendum eſt, tangente Logiſticæ O B occurrente

ſupremæ ordinatarum, ſeu aſymptoto hyperbolæ in P, rectangulum B k P æquari ſpatio hyperbolico k B r R A; eſt enim rectangulum B k P ad k B F rectangulum hyperbolæ inſcriptum, ut illius baſis P k ad baſim hujus k D, ſeu B F, hoc eſt, ob ſimilitudinem triangulorum, ut k B ad ſubtangentem Logiſticæ F O, indeque ex *cap. præced. num.* 6. ut hyperbolicum ſpatium A R r B k ad idem parallelogrammum F B k;



æqualia igitur ſunt rectangulum B k P, & ſpatium hyperbolicum A R r B k: quod fuerat demonſtrandum; ſed & alibi generaliùs idem oſtendemus, ſcilicet *cap.* 13 *nu.* 2.

5 Cùm verò ex *cap. præced. num.* 4. ſpatium hyperbolicum k B R A ad quodvis aliud axi Logiſticæ parallelis reſectum k r R A ſit, ut k B ad k h, & dividendo ſpatium hyperbolicum k B r k ad r R A k, ut s h ad h k; manifeſtum eſt, ſumpta communi altitudine k P dictarum linearum in k P ductarum rectangula proportionari ſpatiis hyperbolicis correſpondentibus, adeòque rectangulum P k in k h æquari ſpatio k r R A, & rectangulum ejuſdem P k in s h æquari ſpatio k B r k, &c.

6 Parallelæ igitur axi Logiſticæ, trilineis N B H, n B h concluſæ, proportionales erunt reſpectivis trilineis hyperbolicis

r B s,

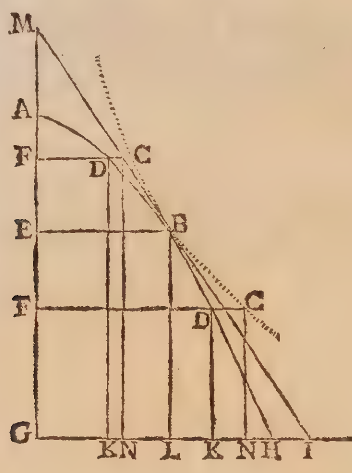
r B s, r B s convexis, aut concavis, prout citra, vel ultra B parallelæ ducuntur; etenim demonſtratione *num.* 3. iterum applicata; cùm ſit k P ad B k, ut B M ad M Q, vel B S ad S N, & B s ad s n. Erit rectangulum k B M, vel k B S, aut k B s æquale rectangulo ex P k in M Q, S N, vel s n; ſed etiam ſpatium B k A R, aut B k k r æquatur ex *num præced.* rectangulo ejuſdem P k in M A, aut S H, vel s h; igitur rectangulum ex P k in reſiduam A Q, vel H N, aut h n æquale erit trilineo hyperbolico R B M, aut r B S, &c. & ideò lineæ A Q, N H, n h axi Logiſticæ parallelæ, ejuſque curva, & tangente concluſæ, erunt ut reſpectiva hyperbolica ſpatia ſupra definita. Quod erat demonſtrandum.

7 Aliis figuris ſimilem comparationem ſuſcipientibus, ut ordinatæ unius proportionales ſint ſpatiis abſciſſis alterius, applicari res eadem poteſt, quemadmodùm, tum hìc, tum alibi locum habere poſſunt obſervationes, & corollaria ſimilia his, quæ *num.* 3. indicavimus; ſpecialia verò problemata duo ex ſola figuræ præmiſſæ inſpectione facillimè ſolves. Alterum: Inter aſymptotos F D, D A, quarum illa ſit axis, hæc ordinata Logiſticæ A B h, hyperbolam ducere, quæ Logiſticam in aliquo puncto B tangat; vel dato in Logiſtica puncto B, hyperbolam nihilominus reperire, quæ idem præſtet: ponatur D F æqualis ſubtangenti F O: ordinata F B, & D A, fiat per B hyperbola inter aſymptotos F D A; hæc proculdubio Logiſticam tanget; ſiquidem eadem O B, tum Logiſticæ, tum Hyperbolæ tangens communis erit; unde conſequitur, quòd, ſi fingatur per aliud punctum B ducta hyperbola, occurret in alio puncto eidem Logiſticæ, ſupra B quidem, ſi F D major fuerit ſubtangente, infra verò ſi minor. Alterum eſt. Logiſticæ maximum parallelogrammum inſcribere: ponatur D F ſubtangenti æqualis, & ordinetur F B: patet D F B maximum fore omnium, quæ dato Logiſticæ ſpatio inſcribi poſſint, parallelogrammorum; alia ſiquidem parallelogramma eidem Logiſticæ ſpatio inſcripta minora erunt, eò quod, ut illud primum adæquent, extendenda ſint uſque ad perimetrum hyperbolæ per B deſcriptæ, quæ tota ultra Logiſticam cadit, utpotè ipſam tangens ex nuper dictis: unde patet, cuivis alteri

pa-

parallelogrammo aliud æquale eidem Logiſticæ inſcriptum exhiberi poſſe, ducta ſcilicet per punctum, ubi Logiſticæ occurrit, Hyperbola, quæ in alio puncto Logiſticam ſecans dabit punctum, ad quod inſcribatur parallelogrammum æquale priori, eo quòd utraque ſpatio aſymptotis, & hyperbolæ interjecto inſcribantur.

8 Leviuſcula quidem hæc, ſi per ſeſe conſiderentur, at ratione methodi, quam generalem eſſe Lectorum ſollertia percipiet, ſuo pretio non fraudabuntur: hinc enim habebimus, data ratione, quam habere debet ſubtangens ME figuræ



ABHG ad abſciſſam AE, dari & maximum parallelogrammum EBL ipſi inſcriptibile, ſi nimirum in eadem data ratione fiat GE ad EA, ut GE, EM ſint æqualia, tangens quippe MBI erit & tangens hyperbolæ CBC per B inter aſymptotos AG, GH ductæ, atque adeò quodvis aliud parallelogrammum GFDK datæ figuræ inſcriptum minus erit parallelogrammo GFC, atque adeò minus GEB, quod proinde maximum eſſe convincetur; & è contra dato maximo parallelogrammo GEBL figuræ ABHG inſcripto, dabitur ejus tangens, poſita EG æquali EM, quia quodvis aliud paral-

ral-

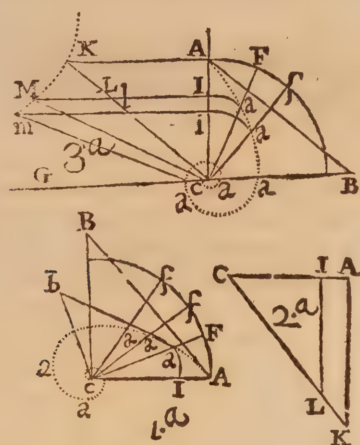
rallelogrammum G F D cùm ſit minus ipſo G E B, erit & minus G F C (ducta per B inter eaſdem aſymptotos hyperbola C B C) & ideò F D minor erit, quàm F C, & hyperbola C B C curvam D B D tanget; ſed hyperbolam tangit recta M B, ergo & curvam D B D propoſitam. Et quod de parallelogrammis maximis dictum eſt, aſſumpta hyperbola lineari, poteſt ad maximos cylindros, aliave maxima facta ex gradibus coordinatarum E B, B L transferri, uſurpatis alterius generis hyperbolis, quadratica, cubica, &c. in quibus facta ex homonymis coordinatarum gradibus ſunt æqualia, eò quòd quadrata, aut cubi ordinatarum reciprocentur diſtantiis à centro, ſeu angulo aſymptotali.

9 Quod ſi earumdem infinitarum hyperbolarum, in quibus videlicet non ſimplices lineæ B L, C N, ſed ipſarum quadrata, aut cubi, aliique majores gradus ſint in reciproca ratione diſtantiarum G N, G L, earumve, graduum quorumcumque, tangentes ignorare te dicas: ne deſponde animo, paucis, adverte, docebo, & quidem ex hac ipſa, quam præ manibus habemus, methodo demonſtrationem eruendo: exponens graduum, quos conſideramus in ordinatis B L, C N eſto x, graduum verò, qui conſiderantur in diſtantiis N G, G K eſto y; ducta ex quolibet hyperbolæ puncto B E aſymptoto parallela, fiat G E ad E M, ut x ad y, juncta M B tanget; quia enim ut x ad y, ita G E ad E M, factum ex gradu G E, cujus exponens x, in gradum E M, cujus exponens y, maximum erit omnium ſimilium factorum ex partibus lineæ G M utcumq; diviſæ, uti ex maximorum, minimorumque methodo facilè conſtat; quare & factum ex ſimilibus gradibus G E B maximum erit omnium ſimilium factorum ex lateribus parallelogrammi triangulo M I G ad aliud, quàm B punctum inſcripti; quæ igitur linea tangit figuram triangularem M I G in B (ipſum nempe latus M I) tanget in eodem puncto hyperbolam C B C ex iiſdem gradibus coordinatarum conſtitutam.

10 Jam ad inſtitutum noſtrum, unde paululum divertimus, propiùs accedentes, quemadmodum in Logiſtica Hugenius propoſ. 1. 2. & hac, quam præ manibus habemus, ſexta, varia ejus ſegmenta invicem comparavit; ita, ut in Logiſtica con-

vo-

voluta, nempe Spirali Geometrica, idem nos præſtemus, argumenti ſimilitudo ſuadet. Primùm igitur, ſicut Logiſticæ ſpatia poſt quamlibet ordinatam in infinitum protenſa ſunt, ut ipſæ ordinatæ ex dictis *cap.* 3. *num.* 7. ita Spiralis geometricæ ſpatia poſt quemlibet ejus radium in infinitum circa centrum per innumeras, ſibique ſuperimpoſitas circulationes continuata ſunt inter ſe, ut quadrata eorumdem radiorum; intellecto enim ſpatio Spiralis A a a C in triangula innumera, ut *cap.* 1. *num.* 11. factum eſt, diſtributo, quæ ex ibi dictis ſimilia erunt, A C a, a C a, &c. erunt ſingula inter ſe, ut homologorũ

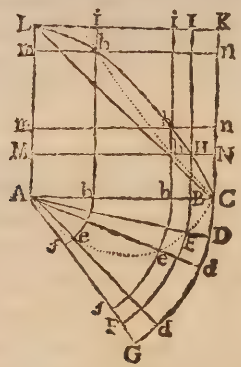


radiorum quadrata, quæ continuè proportionalia ſunt, juxta curvæ hujus naturam; itaque ut unum A C a ad unum a C a, ita omnia ſpatio A a C incluſa ad omnia incluſa ſpatio a a C (ſunt quippe totidem hìc, atq; ibi, utpotè multitudinis utrobique infinitæ) nempe, ut quadratum A C ad quadratum a C, ita ſpatium, quod poſt A C intra dictam Spiralem convolvitur, ad ſpatium, quod poſt a C eadem Spirali concluditur.

11 Hinc dividendo habetur, ſpatium A C a eſſe ad infinitè contortum poſt minorem radium C a, ut differentia quadratorum A C, a C, ſeu C I ad minoris a C, vel C I quadratum, hoc eſt, ducto arcu a I, ut armillæ portio F A I a ad ſectorem I a C,

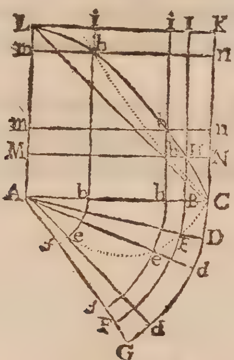
I a C, ſicuti *cap.* 3. *num.* 8. & in Tertio Theoremate Hugenii demonſtrando *cap.* 4. *num.* 5. oſtendimus, in Logiſtica ſpatium duabus ordinatis interjectum eſſe ad infinitè longum poſt minorem ipſarum protenſum, utì eſt differentia ipſarum ordinatarum ad minorem ex ipſis; & veluti in primo Hugenii Theoremate *cap.* 3. demonſtrato, ſpatia Logiſticæ ordinatis concluſa erant, ut extremarum ordinatarum differentiæ, ita in Spirali geometrica ſpatia quælibet A c a, a c a erunt inter ſe, ut differentiæ quadratorum ab extremis radiis dicta ſpatia comprehendentibus, ſive ut circulares armillæ F A I, f a i illis adſcriptæ.

12 Trilineis verò a I A, ſive ad invicem, ſive cum reſiduis a A F, aut cum zonis F A I a comparandis inſerviet generale hoc Theorema. Si quævis figura L H C, axe A L in punctum



A contracto, illique parallela K C in arcum C G æquabiliter curvata, tranſeat in Spiralem C E A, ordinatis H M, h m in totidem ejus ramos, ſeu radios A E, A e abeuntibus, & per angulum E A e divaricatis, cujus menſura ſit arcus D d æqualis intervallo ordinatarum, nempe ipſi M m, vel N n. Dico Spirale ſpatium C E A fore ad circumſcriptum ſectorē C G A, utì eſt conoides ex figura L H C circa axem L A ad circumſcriptum cylindrum ex parallelogrāmo A K circa eumdem axem revoluto. Ducto pariter quovis arcu E B, aliiſque lineis coordinatis, ut in figura, trilineum B C E fore ad cir-

cumſcriptam zonam B C D E, utì eſt annulus ex H C B circa axem revoluto ad tubum cylindricum ex circumſcripto parallelogrammo H N C B circa eumdem axem, ac dividendo, trilineum B E C ad C E D eſſe, ut ſunt annuli ex ipſis H B C, H C N circa axem revolutis; quodlibet etiam trilineũ B E C ad aliud b e C, aut C E D ad aliud C e d eſſe, ut ſunt annuli ex ipſis B H C, b h C, aut ex H C N, h C n circa ipſum axem;



portiones quoque B E e b, ſive ad aliam b e e b, ſive ad trilineum quodvis B C E eſſe, ut reſpectivè inter ſe ſunt annuli ex H B b h, h b b h, aut H B C circa ipſummet axem L A. Longior eſt propoſitio, quàm demonſtratio. Arcus enim B E ad B F eſt, ut C D ad C G, ſcilicet ex conſtructione, ut C N ad C K, vel B H ad B I, nempe ut cylindrica ſuperficies, quæ in conoide ex linea B H, ad cylindricam ſuperficiem, quæ in cylindro per lineam B I circa axem revoluta producitur; & hoc ſemper, ſive lineas majuſculis litteris, ſive minuſculis notatas inter ſe compares; ſunt autem tum arcus B F, in ſectore concentrici, tum cylindricæ omnes ſuperficies ex B I, concentricæ in cylindro, proportionales, quippe in eadem ratione diſtantiarum a centro A, vel axe A L; ergo ex Lemmate 29. Torricellii de dimenſione parabolæ, omnes arcus concentrici in ſectore ad omnes concentricos in ſpatio Spirali erunt, ut ſunt omnes ſuperficies cylindricæ in cylindro ad omnes cylindricas ſuperficies in conoide; unde & dividendo, &

pro-

proportionales partes comparando, habebitur veritas Theorematis propoſiti.

13 Quandoquidem ob æqualitatem arcus C G cum axe figuræ L A, ducta ſubtenſa L C, erit triangulum L A C æquale ſectori C G A, atque adeò erit ad Spirale ſpatium in eadem ratione, in qua cylindrus conoidi circumſcriptus ad ipſam conoidem, hinc figura quælibet evoluta ad convolutam rationem habebit compoſitam ex ratione ſui ad triãgulum æquè altum in eadem baſi, & ex ratione circumſcripti cylindri ad conoidem ex ejus revolutione circa axem genitam. Cùm Spiralis Archimedea, ob æquabilitatem motuum, quibus componitur, habeat radios proportionales ordinatis in triangulo baſi parallelis, indeque fiat convolutione trianguli axem habentis parem arcui ſectoris circumſcripti, fit inde, ſpatium ſpirale trientem eſſe circumſcripti ſectoris, quemadmodum conus ex triangulo triens eſt circumſcripti cylindri; & cùm ſecunda Spiralis quadratica fiat convolutione parabolæ, cujus ad inſcriptum triangulum ratio eſt ſeſquitertia, cylindri verò circumſcribentis conoidem ab ipſa genitam ratio eſt dupla, ideò ſpirale ſpatium quadraticum erit ſemiſſis circumſcripti ſectoris, habebit verò parabola, ex qua gignitur, ad ſe ipſam in tale ſpatium convolutam, rationem compoſitam ex ſeſquitertia, & dupla, ideſt quam 8 ad 3. & ſic deinceps applicationem proſequere mi Lector.

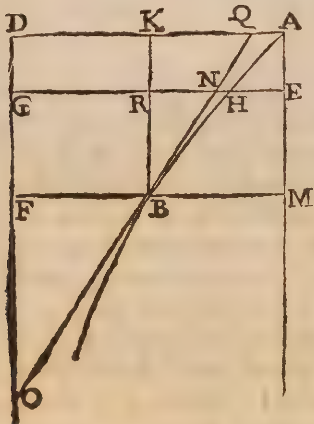
14 Ego ad Spiralem Geometricam revertor, in qua, utpote ex convolutione Logiſticæ genita, jam ſcies Trilinea, initio *num* 12. recenſita, eam inter ſe rationem habitura, quam annuli ex correſpondentibus Logiſticæ portionibus trilinearibus circa axem revolutis, ſive inter ſe, ſive cum tubis cylindricis illos circumſcribentibus comparatis, ubi geometricæ Spiralis trilinea cum zonis circularibus illa includentibus conferantur; quomodo autem illi annuli ex Logiſticæ portionibus geniti notam habent quantitatem, nonniſi perſpecta ſolidorum, quæ ex Logiſtica circa axem revoluta producuntur, menſura, oſtendi poteſt; de qua re in nono Theoremate cum Hugenio, agendum erit, idcòque ex dicendis *cap. 9. num.* 10. defectus ſupplendus eſt.

CAPUT VIII.

Septimum Theorema pridem oſtenſum, ut nova demonſtratione fulciatur, oſtenditur, ſpatio à qualibet curva contento quò ad totum, & quò ad partes æquale ſpatium ex ſubtangentibus ad curvæ puncta applicatis, vel ad reſpectiva puncta baſis: item ducta per quodvis punctum tangentibus parallela, occurrente ordinatis, puncta interſectionum eſſe in curva, quæ cum priori comprehendet ſpatium primæ figuræ duplum, adeòque cum ejus baſi [niſi hanc nova curva ſecet, ac congruo loco punctum acceptum ſit] ſpatium primo æquale. Eadem opera duæ ejuſmodi curvæ deſcribuntur. Eadem doctrina converſim accepta inventioni tangentium deſervire poterit. Dimentio figuræ per normam, & perpendiculum deſcriptæ; Spatii Cycloidis, obiter ejus tangente determinata, dimenſio, variorumque ſegmentorum proportio. Segmenta ejuſdem quadrabilia. Ciſſoidalis ſpatii, ejuſque ſegmentorum menſura. Spatium à Tractoria, & ejus axe interceptum æquale quadranti radio ſuæ tangentis deſcripto. Infinitarum parabolarum, hyperbolarum quoque infinitarum ſpecierum, ſpiralium item cujuſvis generis, etiam Geometricæ dimenſio expeditur. Septimi Theorematis Hugeniani demonſtratio ex hac doctrina eruitur. Octavum quoque Theorema pridem oſtenſum hinc novam demonſtrationem aſſumit.

1 Ad

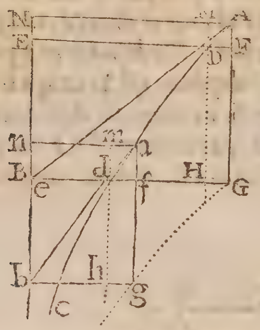
1 AD ſeptimum Theorema gradum facimus. Illud Hugenius his verbis proponit: *Spatium infinitum inter ordinatam, Logiſticam, & aſymptoton, qua parte hæ ad invicem accedunt, duplum eſt trianguli comprehenſi ordinata, tangente ad idem ordinatæ punctum, & ſubtangente. Sic in eadem figura ſpatium infinitum poſt ordinatam B F duplum eſt trianguli B F O.* Quod quidem ex dictis *cap* 4. *num.* 6. evidenter deducitur, rectangulum enim ſubtangentis, ſeu parametri F O in ordinatam B F, quod loco citato oſtenſum eſt ſpatio infinito poſt

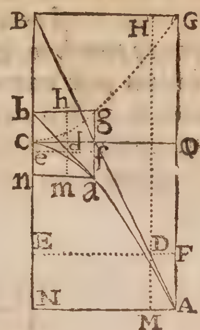


B F exporrecto æquale, utique duplum eſt trianguli B F O ejuſdem baſis, & altitudinis; ſed aliam nihilominus demonſtrationem adjiciemus ad pleniorem ſcientiam, & methodi varietatem, aliis detegendis veritatibus inſervientem, uti ex his, quæ ſpeciminum loco ſubjungemus, prudens Lector agnoſcet; Vix certè figura ulla notæ hactenus deſcriptionis eſt, cujus dimenſio ex fonte jam aperiendo non elegantiſſimè promanet: imò & infinitorum ſolidorum menſura hinc elici poteſt, ut patebit *capite ſequenti nu.* 7. & diſtantia centri gravitatis variarum figurarum, ut *cap.* 11. *nu.* 6. conſtabit.

2 Sit

2 Sit curva quævis A D C circa axem B N, & ex quibuſvis curvæ punctis A, a ductis tangentibus A B, a b, quæ cum



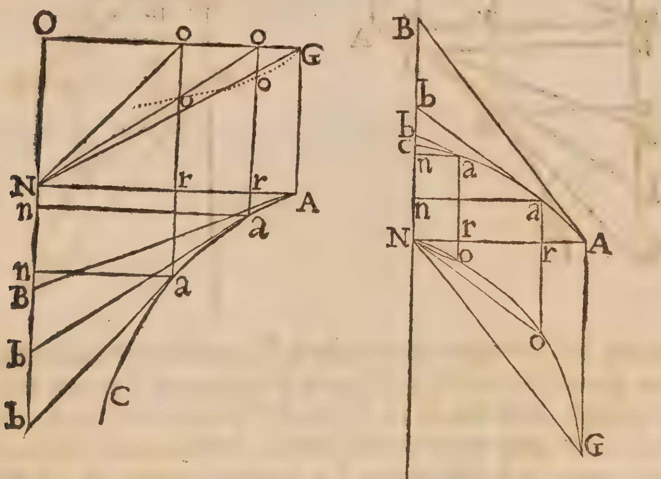


axe conveniant in punctis B, b, necnon ordinatis A N, a n, compleantur parallelogramma A N B G, a n b g circa ipſas tangentes, velut diametros conſiſtentia; ſicque ſemper fiat, ut per omnium parallelogrammorum angulos exteriores, ideſt per puncta G, g, tanſeat curva G g: comprehendet hæc cum priori curva A a C, & latere extimi parallelogrammi A G, ſpatium C a A G g æquale figuræ priùs poſitæ C a A N; ſumpta enim quantùmlibet parva tangentis particula A D, a d, ac per D, d ductis axi, & baſi parallelis M D H, E D F, m d h, e d f erunt rectangula G D, D N, g d, d n, utpotè complementa parallelogrammorum circa diametrum, invicem æqualia (potes & utrinque addere A D, a d, ut compares æqualia parallelogramma A H, N F, aut a h, n f; potes inſuper directum parallelogrammum A H, a h in dextera figura commutare in obliquius intra eaſdem parallelas eidem nihilominus tangenti impoſitum, ſpatio autem C A G g meliùs adjacens ad evidentiorem circumſcriptionem) & hoc ſemper in quolibet puncto eveniet, ergo cùm in utroque ſpatio hæc indefinitè parvæ latitudinis parallelogramma poſſint ab iis deficere, ſi inſcripta ſumantur, aut eadem ſpatia excedere, ſi circumſcripta comparentur, minori defectu, aut exceſſu quolibet dato; conſtat ipſamet ſpatia C a A G g, C a A N integrè, & particulatim,

ideſt,

ideſt tum tota, tum eorum correſpondentes partes invicem cōparando, prorſus æqualia eſſe. Imò inde inferre potes, quòd, cum totum parallelogrammum N G trianguli N B A ſit duplum, & complexum ex utraque figura g G A a C, & C a A N duplum ſolius C a A N, reliqua figura B G g C dupla erit trilinei C A B, curva C A, tangente A B, & axis portione, quam tangens intercipit, comprehenſi; id quod expeditæ multarum figurarum dimenſioni conducere poteſt.

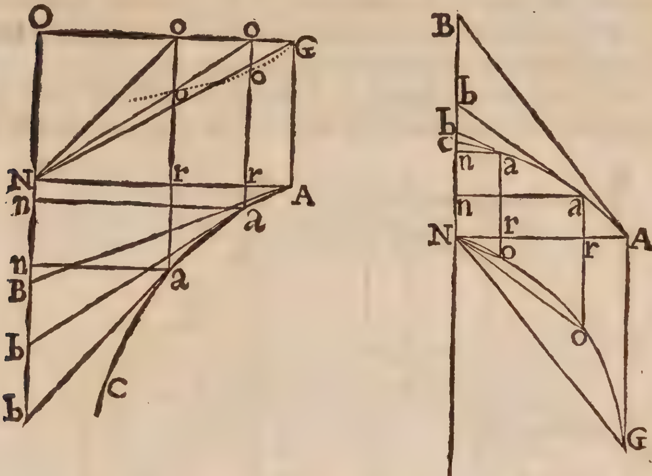
3 Hinc ſi in qualibet figura C A N, ductis ubilibet axi parallelis, primùm A G æquali ſubtangenti N B extimi puncti A,



tum a r o, a r o, reſectis ultra ordinatam A N ipſis r o, r o reſpectivè æquantibus longitudinem ſubtangentis n b, n b ad ſuum punctum a pertinentibus, quouſque compleatur figura o o G A N; vel etiam (quod in idem recidit) ſi per N punctum regula quædam N G converti concipiatur, ſecans axi figuræ parallelas a r, a r productas in punctis o o, itaut eadē regula N G, ſive N o ſemper parallela exiſtat tangenti A B, aut a b, ſintque B A G N, b a o N parallelogramma (quomodo rurſus r o æqualis erit reſpectivæ n b, auferendo ſcilicet ex æqualibus a o, b N, æquales a r, n N) Ex utraque

in-

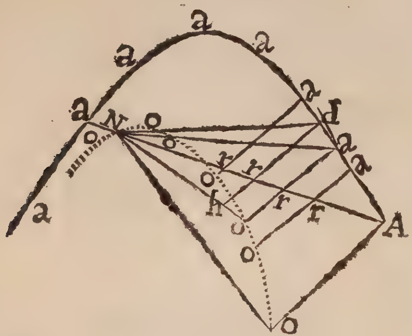
inquam hac deſcriptione colligitur, figuram o o G A N æqualem fore priùs datæ figuræ C A N, quemadmodum & partes correſpondentes r A G o, n a A N ſemper æquales eſſe; quid enim hoc aliud eſt, quàm ipſas lineas A G, a g, *num. præced.* conſideratas, directè deprimere in A G, r o, ut jam non ad

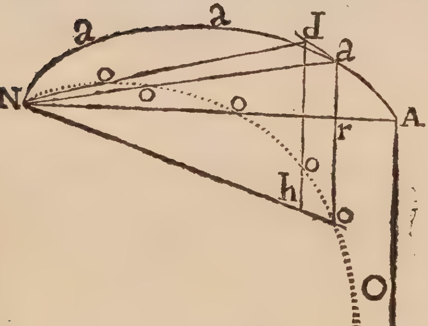


curvam, ſed ad reſpectiva baſis A N puncta terminentur? Spatium igitur C a A G g, ſervata ſingularum ſuarum linearum æqualitate, protruſum in N o o G A, erit, ut priùs, æquale ipſi C A N, niſi malis & hìc ſumere infinitè parvam tangentis portionem, ferè cum curva A a coincidentem, & ex proportionalitate B N, ſeu G A ad r a, cum N A ad A r, inferre æqualitatem rectangulorum G A r, & A N n, ac ſimiliter in reliquis, ut ſupra.

4 Vel etiam ſumpta infinitè parva tangentis, aut curvæ portione A a, junctiſque ad N radiis A N, a N, a N, oſtendetur ſemper parallelogrammũ G A a duplum trianguli N A a, utpotè eidem baſi A a, inter eaſdem parallelas A a, N G (aut a a, N o) inſiſtentis, quare tota figura C a A G o o N totius C A N dupla erit, & dividendo ſpatium o o G A N ipſi C A N æquale erit; eo modo quo & in his bilineis curva, & re-

& recta comprehenſis, velut a a A, aut N a A, accepto puncto N, ſive in extremo baſis, ſive alibi, aut etiam intra figuram, & per N tranſeunte recta N o, quæ tangentibus a d

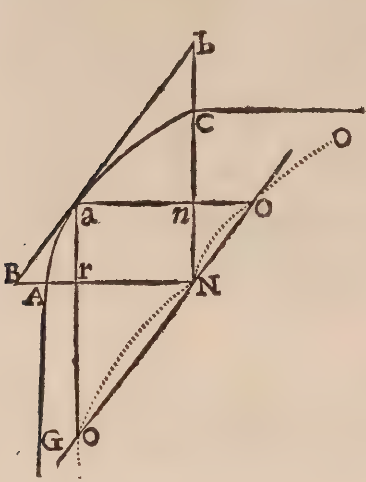


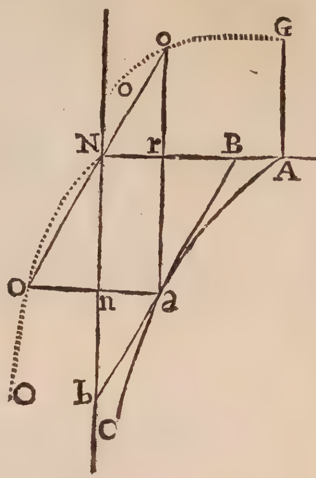


perpetuò parallela exiſtens, ſecet ipſas a r, ad baſim N A ordinatas, in punctis o, erit N o o A a N dupla trilinei, ſeu bilinei (prout integra ſumitur, aut ejus pars ramis N a intercepta) N a A, propter parallelogrammum d a o h ubique duplum trianguli d a N; unde mirùm quot figuræ dimenſionem accipiant.

5 Imò eadem opera poſſent duæ figuræ eidem datæ æquales conſtitui, ſi nempe regula mobilis per punctum N utrinque extendatur, ut occurrat ambis coordinatis ex eodem puncto,

ſcilicet non tantùm ipſi a r axi parallelæ, ſed & a n parallelæ baſi in punctis o o; habebitur enim eadem ratione figura C N O o, tum priori C A N, tum eidem collaterali G O N A

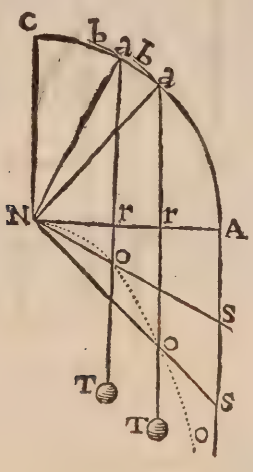




integrè, & particulatim (ideſt quò ad totum, & quò ad partes proportionales) prorſus æqualis; ſicut viceverſa, ubi figura C N O, vel etiam G O N A alteri adjacenti C A N integrè, & particulatim modo præſcripto æqualis fuerit, ducta a b ramo N O parallela tanget curvam A a c in a; ſi enim ita non ſit, alia igitur, quàm N O, parallela erit tangenti a b, unde alia figura, quàm C N O o, fiet particulatim, & integrè æqualis ipſi A a C N, adeòque & ipſi primæ C N O, vel G O N A; quod inferret æqualitatem totius cum parte; multarum igitur curvarum tangentes hac methodo determinabis; cave tamen partium ordinem hactenus indicatum adamuſſim obſerves, in lubrico enim, ſi quidquam immutaveris, te fore prævideo. Placet autem compendii cauſa figuras hactenus deſcriptas *invicem Correlatas* appellare.

6 Quoniam verò tangentium alias methodos dedimus, in negotio dumtaxat dimenſionis figurarum paullò diutiùs immo-

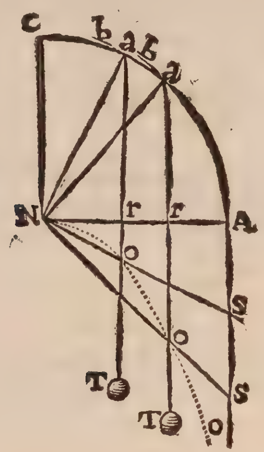
morabimus, cujus ex hac methodo ſpecimina benè multa obvia ſunt. Proponatur primò figura N o o, cujus olim hanc geneſim excogitaveram ad circuli quadraturam promovendã. Norma ex regulis C N, N A ad angulum rectum C N A compoſitis in plano verticali circa punctum N ita convertatur, ut brachium N C determinatæ longitudinis exiſtens,



extremo ſuo C peripheriam quadrantis circularis C a a A deſcribat, brachium verò indefinitè extenſum N A infra orizontem versùs S inclinetur, ſeceturque in o à filo a o, pondere T perpendiculariter deſcendente extenſo, atque extremo regulæ N C, ſive N a alligato; itaque angulus a N o ſemper rectus erit; ſed & ducta circuli tangente a b rectus eſt N a b; æquidiſtat igitur N o tangenti a b; eſtque N o o figura quadranti Correlata; & ideò ſpatium curva N o o, radio N A, & aſymptoto A S interjectum æquale erit circulari quadranti C A N, ejuſque partes N o r, ſemiſegmentis arcu C a, ejuſque ſinu recto, & verſo comprehenſis æquales erunt, & zonæ o r r o zonis arcu a a, ordinatiſque ad axem N C interjectis æquabuntur, & interminata ſpatia o o r A S, ſpatiis

 ar-

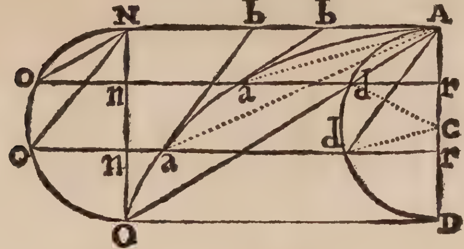
arcu A a, radio A N, & ſinu arcus a C determinatis; præterea ſectores convexi N C a, cavis ſectoribus N a o æquales erunt, & portiones, curva N o, ejuſque ſubtenſa N o comprehenſæ, trilineis arcu a c, ejuſque tangente, & intercepta



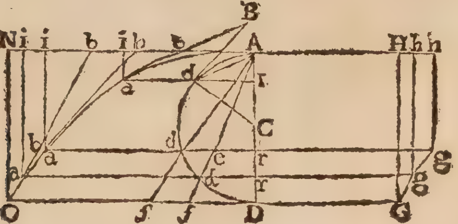
axis portione definitis æquabuntur, & arcus C a ad ejus ſinum, ſive ad N r, erit perpetuò, ut ſpatium N o a C ad rectangulum C N r, aut A N r, &c. Tangentem poſcis ad quodlibet punctum o? divide bifariam N o; ex puncto diviſionis ad punctum a junge rectam, quæ ſecabit N r in aliquo puncto; hinc juncta ad o tanget. Unde habetur, tangentem a b quadrantis N C A, productam uſque ad radium N A, ſimul cum ſinu a r, ſeu linea o r ordinata Correlatæ N o o, & ramo N o, ac tangente, quam ſupra determinavimus ad punctum Correlatæ o, ipſum radium N A, uſque ad occurſum tangentis b a protenſum, ſecare in harmonica proportione; ſeu abſciſſam N r ad ſubtangentem, quæ correſpõdet puncto o, & ordinatæ o r, eſſe, ut o a cum a r ad ipſam a r. Eamdem lineam ab aliis poſtmodum deſcriptam inveni poſita N o æquali abſciſſæ A S, ſine relatione ad circulũ.

7 Spa-

7 Spatii Cycloidalis dimenſio hinc etiam profluit ; eſto enim Cyclois A a O, cum circumſcripto parallelogrammo



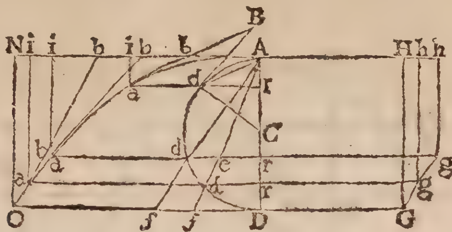
D N, ac per punctum N perpetuò feratur recta N O, parallela exiſtens tangentibus Cycloidis a b , & occurrens ordinatis trilinei Cycloidalis , nempe ipſis a n productis in O. Conſtat figuram Correlatam, inde provenientem, N o o fore ipſummet ſemicirculum genitorem Cycloidis, quippe cujus chordis N o parallelæ ſint dictæ tangentes Cycloidis, ut dudum Geometris innotuit, ac Torricellius indicavit, poteſtq; ex generali noſtra de tangentibus ex motuum compoſitione determinandis doctrina *cap.* 5. tradita ſic paucis deduci. Gignitur Cyclois ex duplici motu, utroque æquabili, & æquè ve-



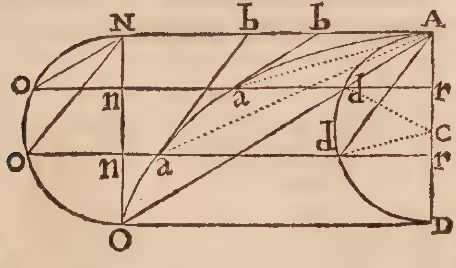
loci, altero per baſim O D, cujus directio in puncto a eſt a d, altero per arcum ſemicirculi, cujus directio eſt tangens d B;

hac

hac igitur poſita æquali lineæ da, ſeu ipſi arcui dA, juncta Ba erit tangens, utpote diameter Rhombi laterum æqualium



ad, dB, adeòque in qua eſt directio motus ex duobus æquè velocibus per latera ad, dB compoſiti; verùm quia tam angulus CdA ſimul cum AdB, quàm angulus CAd, ſimul cum Adr rectum conſtituunt, eſtque CdA æqualis CAd, etiam BdA ipſi Adr æquabitur; duplus eſt igitur Bdr ipſius AdB; ſed & duplus unius ex æqualibus internis dBa; itaque anguli dBa, BdA ſunt æquales, ſed & alterni; æquidiſtat igitur tangens aB chordæ circuli genitoris Ad. Quoniam igitur præſcripta figura Noo eſt ſemicirculus genitor, atque



ex ea, quam nunc illuſtramus, doctrina, æqualis eſt integrè, & particulatim trilineo OaAN, hoc ſublato ex parallelogrammo NADO, quod ejuſdem ſemicirculi, ex Archimedeis do-

ctri-

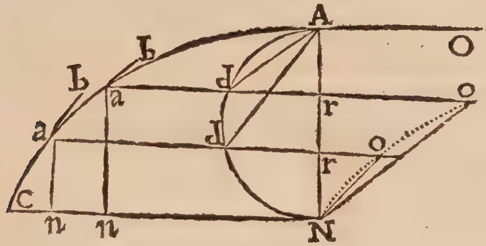
ctrinis, ſive utì & nos in Vivianeis oſtendimus ad *Pr.36.Cor.1.* eſt quadruplum, reſiduum ſpatium ſemicycloidis O a A D triplum erit ſemicirculi genitoris. Sed & partium cavæ cycloidis, duabus tangentibus, & curva comprehenſarum dimenſio innoteſcet; putà ſpatium A b a ſemper æquale erit portioni circulari, arcu A d, ejuſque chorda comprehenſi, eo quòd ſpatium A d r ſpatio, *vide fig.1.* A a i, & triangulum A d r triangulo i b a ſit æquale.

8 Sed & ſpatia trilinearia, *redi ad fig.2.* a d A a, arcu circuli d A, curva A a, & ordinata d a comprehenſa, dupla ſemper eſſe convincentur ſegmentorum cycloidis, curva A a, & ſubtenſa A a comprehenſorum; ſiquidem tota parallelogramma d A b a dupla ſunt integrorum triangulorum a A b; ſed ſegmenta cava cycloidis a A b, ſimul cum ſegmentis circularibus A d duplum efficiunt ſolius cavi cycloidalis ſegmenti a A b; igitur reliqua trilinea a d A dupla erunt reſiduorum ſegmentorum convexorum cycloidis A a; unde & zonæ a d d a duplæ erunt ſectorum cycloidalium a A a, duabus ſubtenſis, & curva a a comprehenſorum. Hinc ſi ordinata a d eſſet ad ſemiſſem altitudinis cycloidis, ſive per centrum C circuli genitoris tranſiret, quoniam tunc trilineum A d a quadrabile foret, utpote æquale ungulæ, ſeu figuræ ſinuum quadrantis, ad cujus arcum applicaretur, ideſt æquale quadrato radii C d; tunc inquam ſegmentum convexum cycloidis a A quadrabile pariter foret (Leibnitio etiam id demonſtrante) nempe æquale ſemiſſi quadrati radii; quòd ſi ordinata a d r ſit ad quartam altitudinis partem, itaut A r ſit æqualis ſemiſſi radii A C, quia ſector circularis d A C duplus erit trianguli a d A (quippe in æqualibus baſibus d A, d a ad altitudinem C A duplam ipſius A r) & trilineum cycloidale d A a, ex nuper dictis, duplum eſt ſegmenti convexi cycloidis A a, erit tota figura a A C d a dupla ſegmenti a A d, chorda A d, curva A a, & ordinatæ portione a d contenti; igitur dividendo, triangulum æquilaterum d A c æquale erit huic ipſi ſegmento; quod proinde quadrabile erit; unde & quadrabile, quod additione trianguli d A r conficitur, ſemiſegmentum a A r, ejuſque duplum in integra cycloide, æquale nimirum æquilatero triangulo, quod

ge-

genitori circulo inſcribitur, utì Hugenio jam pridem innotuit; ſed & cycloidalia ſegmenta, quorum ſubtenſæ puncta conjungunt, alterum à tangente verticis, alterum ab ordinata per centrum circuli, æquè diſtantia facilem quadraturam admittunt, ſive ad eaſdem, ſive ad diverſas partes puncta jungantur, & zonæ binis ejuſmodi ſubtenſis interjectæ pariter quadrabiles inveniuntur, & ſegmenta, tum cycloidis, tum ſemicirculi genitoris, abſciſſa chordis, quarum extrema à verticis tangente, & à baſi æquè diſſita ſint ad eaſdem partes, æqualia oſtenduntur, ubi verò ad partes contrarias, æqualia ſemicirculo, ſimul cum rectangulo diametri in ſinum arcus reſpondentis, &c. in quibus immorari non vacat, quippe ad alia pergendum.

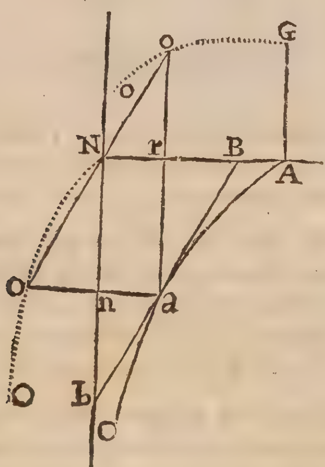
9 Quod etiam demonſtravit olim Hugenius, ſpatium Ciſſoide Dioclea ultra quadrantem continuata, ejuſque aſymptoto, & circuli genitoris diametro interceptum, triplum eſſe ſemicirculi genitoris, faciſſimè ex noſtra hac methodo deducitur, illud, ejuſq;ſingulas partes, cum cycloide,& ejus portionibus comparando. Sit enim ſemicyclois A C N, cujus ſemi-



circulus genitor A d N, ex quo etiam genita intelligatur Ciſſois N o o. Juncta ſubtenſa qualibet N o, atque ordinatis,ut in figura, patet junctam N d eſſe ipſi N o perpendicularem, propter d r, r N, r o continuè proportionales; æquidiſtat igitur ipſa N o chordæ A d, atque adeò & tangenti cycloidis a b; quod cùm ſemper eveniat, ſequitur totum ſpatium in-

infinitè longum o N A O toti, ſemicycloidi, & ejus ſingulas partes N o r ipſis portionibus C a n, & o r r o ipſi n a a n perpetuò adæquari; juncto autem ciſſoidi ſemicirculo A d N, totum ſpatium o o N d d A O ſemicirculi eſſe quadruplum, & partes o N d quadruplas ſegmenti N d, arcu ſcilicet, ac chorda his litteris deſignata comprehenſi, aut ſectores diametro A N, curvæ portione N o, junctiſq; ex A ad o chordis A o interjectos, eorumdem ſegmentorum circularium N d eſſe triplos, &c.

Si curva A a c fuerit Tractoria, qualem *cap.* 5. ſub finem *num.* 2. deſcripſimus, cujus nimirum tangens a b eiuſdem ubique eſt longitudinis, utique ei Correlata figura o o G erit

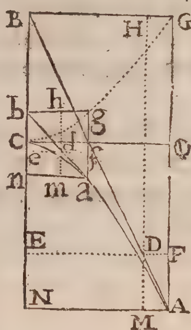


circuli quadrans, centro N, radio N A, quippe N O tangenti parallela, erit ubique æqualis, unde infinitum ſpatium à Tractoria, ejuſque Aſymptoto concluſum, quadranti circulari, radio tangentis deſcripto æquale demonſtrabitur, & partes proportionales ſegmentis congruis reſpondebunt.

10 Quid de parabolarum infinitis ſpeciebus addam? Sanè, reſumpta figura *numeri* 2. *hujus Capitis*, conſtat, ſpa-

N tium

tium A a C g G eſſe duplicatum trilineũ parabolicum A C Φ, poſito quòd ipſa C A N ſit parabola quadratica, in qua ſubtangentes N B, ſive iis æquales A G, duplæ ſunt abſciſſarum N C, ſeu A Φ; itaque parabola A C N, utpotè æqualis ſpa-

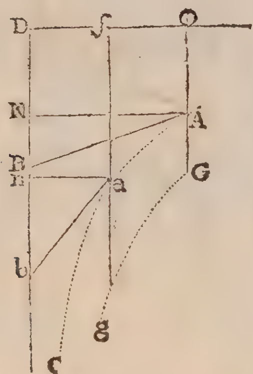


tio A a C g G, erit dupla trilinei A C Φ, ſui nimirum complementi ad parallelogrammum circumſcriptum, adeòque æqualis erit $\frac{2}{3}$ ejuſdem circumſcripti parallelogrammi; ubi autem ſubtangens N B abſciſſæ N C tripla fuerit (utì accidit in parabola cubica, ſeu in curva, cujus ordinatarum N A, n a cubi fuerint, ut partes axis N C, n C à vertice abſciſſæ) erit, eadem ratione, figura A a C G, adeòque & ipſa parabola C A N, tripla trilinei C A Φ, & conſequenter æqualis $\frac{3}{4}$ circumſcripti parallelogrammi; ac generaliter habebit cujuſvis ſpeciei parabola ad trilineum, ſeu complementum parallelogrammi ipſum circumſcribentis, eamdem ſemper rationem, quam exponens poteſtatis ſuarum ordinatarum ad exponentem poteſtatum axis; ideſt in quadratica, ut 2 ad 1. in cubica, ut 3 ad 1. in quadratoquadratica, ut 4 ad 1. &c. In ea, in qua cubi ordinatarum fuerint, ut quadrata abſciſſarum, ut 3 ad 2. & in qua quadratoquadrata ordinatarum ſint, ut cubi partium axis, ut 4 ad 3, &c. quippe in hac ipſa ratione erunt ſemper ſubtãgentes conflantes figuram A C G, parabolæ æqualem, ad abſciſſas conflantes dictum trilineum, ut dudum Geo-

me-

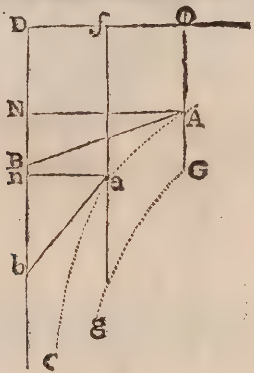
metris innotuit, poteſtque deduci ex generali tangentium conſtructione *cap.* 5. præſertim *num.* 4. & ſequentibus ad parabolas applicata.

11 Eodem planè modo infinitas hyperbolas ad menſuram vocabis: Ac primò ſpatium Apolloniana hyperbola, ejuſque aſymptoto concluſum infinitum eſſe, ſic patebit: eſto talis hyperbola A a C, cujus aſymptoti Φ D, D B; manifeſtum eſt, ſubtangentes B N æquales eſſe diſtantiis à centro N D;



unde facta, juxta præſcriptum *num.* 2. figura g G A a C, erit perpetuò G A æqualis A Φ, g a æqualis a f, &c. & ſpatium g G A a C æquale ſpatio C a A Φ D b; ſed & idem æquale C a A N b; ſpatia igitur C a A Φ D b, & C a A N b ſunt æqualia; ſed primum excedit ſecundum parallelogrammo N A Φ D; ergo oportet utraque infinita eſſe; ex finitis enim, quod alterum ſuperat ſpatio finito, non eſt illi æquale, ſed tantùm in infinitis hoc locum habet; poſtea curva A a C ſupponatur eſſe hyperbola ſecundi gradus, in qua videlicet ordinatarum A Φ, a f quadrata reciprocè ſunt inter ſe, ut partes aſymptoti f D, D Φ; manifeſtum eſt ex dictis *cap. præcedent. num.* 9. diſtantias à centro D N, duplas fore ſubtangentium N B; itaque cùm ſemper in hoc caſu Φ A ſit dupla A G, fa

dupla a g; tota figura b D Φ A a C dupla erit ipſius g G A a C; adeòque dupla ſpatii huic æqualis C a A N b; & dividendo, ſpatium infinitum C a A N b æquale parallelogrammo hyperbolæ inſcripto N A Φ D. In hyperbola tertii, aut quarti gradus, propter diſtantias à centro triplas, & quadruplas ſubtangentium, colligetur, ſpatium C a A N b eſſe ſemiſſem, aut

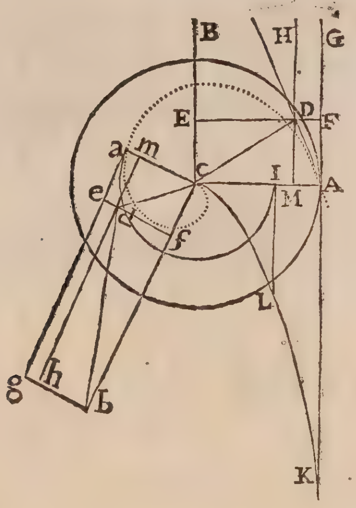


trientem, &c. parallelogrammi D A; & generaliter eſſe illud ſpatium ad hoc parallelogrammorum, ut exponens diſtantiarum à centro Φ D ad exponentem ordinatarum Φ A diminutum exponente earumdem diſtantiarum; ſeu ſi exponens diſtantiarum ſit y, ordinatarum x, ut y ad $x - y$, ſcilicet in prima hyperbola, ut 1 ad 0. in ſecunda, ut 1 ad 1. in tertia, ut 1 ad 2. &c. in ea, in qua diſtantiarum quadrata eſſent, ut cubi ordinatarum, ut 2 ad 1. &c.

12 Spirales verò, aut quæ harum inſtar generari concipiuntur figuræ, numquid ab hujus methodi, & doctrinæ legibus excludentur? imò & ipſæ illius influxum in ſe derivare poterunt, ſed ſuæ naturæ contemperatum; figura enim ex ſubtangentibus ad reſpectiva puncta radii applicatis, non quidem æqualis, ſed dupla ſemper erit Spiralis figuræ ſibi correſpondentis, eò quòd harum figurarum elementa non ſint parallela,

&

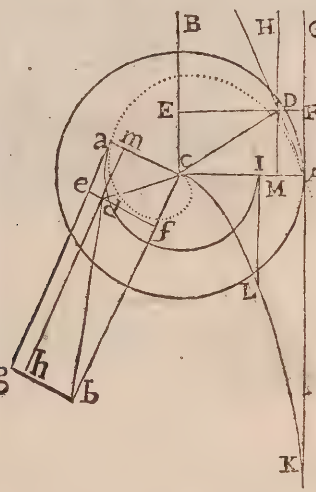
& parallelogramınis analoga, ſed convergentia, & triangulis parallelogrammorum ſubduplis reſpondentia. Exempli gratia in Spirali Archimedea ad quemvis radium A C, vel a C ducta ex centro perpendiculari C B, aut C b æquali peripheriæ radii C A, aut reſpectivè arcui a I, qualem radius aſſumpto puncto A, vel a in ſui converſione eò uſque deſcripſit,



patet ex Archimede, imò & ex dictis *cap.* 5. *num.* 9. junctam B A, ſeu b a tangentem eſſe (debes autem mi Lector concipere, utut Schemma defæcerit, lineam b d directè tendere in a, ibidemque Spiralem tangere, & lineam A D concurrere cum C B in B, unde ducta quædam radio parallela occurrat parallelis ſubtangentis C B ductis ab extremo radii A, & à quovis tangentis puncto D, ipſis ſcilicet A F, D M, in punctis G, H, uti in minuſculis litteris ipſa g b occurrit homonymis, & homologis lineis in g, h, atque demùm per D, ſeu d punctum radio parallelam actum eſſe, utì vides, F D E, f d e) puncto igitur D, ſeu d aſſumpto, quod contactui quàm proximum ſit, completiſque parallelogrammis D G, D C, ſeu d g, d c æqualibus, utpotè complementis parallelogram-

mo-

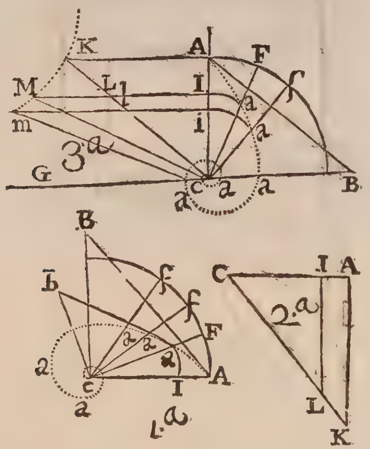
morum circa diametrum, patet junctis D C, d c, triangula C D A, C d a eſſe ſemiſſem æquè altorum, & eamdem baſim obtinentium parallelogrammorum C A F E, C a f e; quare & ſemiſſis erunt æqualium illis parallelogrãmorum M A G H, m a g h; cùmque hæc triangula excedere poſſint Spirale ſpatium C A a C minori exceſſu quolibet dato, conſtat ipſum



integrum Spirale ſpatium omnium ejuſmodi parallelogrammorum M G, m g ad minimam latitudinem redactorum, & in unam figuram confluentium (quod fit, ipſis lineis A G, a g ad reſpectiva puncta ejuſdem radii C A in eadem à centro diſtantia applicatis, ſcilicet A G in A K, a g in I L, exiſtente C I æquali ipſi C a, & ſic ubique, quouſque compleatur figura C L K A, quæ in hoc caſu erit trilineum parabolicum, eò quòd ſubtangentes, quemadmodum & arcus, quibus æquãtur, in duplicata radiorum ratione procedunt, ut monuimus *eodem cap. 5. num. 9.*) ſubduplum eſſe; atque adeò cùm tale trilineum C K A, duplum ſpiralis ſpatii, conſtet, ex dimenſione parabolæ, eſſe duos trientes trianguli ſub radio C A ut altitudine, & A K ut baſi, ideſt duos trientes circuli radio C A,

aut

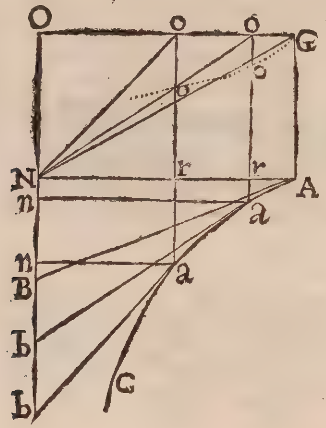
aut correſpondentis ſectoris radio a C, vel C I deſcripti, & ipſum Spirale ſpatium circumſcribentis, habetur, ſpiralia ſpatia trientem eſſe circularium ſectorum eadem circumſcribentium. Similiter aliarum ſpecierum ſpiralia ſpatia per correſpondentia trilinea parabolica *cap.* 5. *citat.* indicata metiri poteris, & cum ſectoribus circumſcriptis comparare; ſed & Spiralem Geometricam, ſeu Logarithmicam A a a invenies



comprehendere, poſt infinitos ſibi ſuperimpoſitos cincinnos, cum radio C A ſpatium ſubduplum circumſcripti trianguli A B C; figura enim C L K A ex ſubtangentibus ad congrua radii puncta applicatis hìc in triangulum degenerat, quia ob æqualem ſemper inclinationis angulum C A B, C a b, triangula rectangula C A B, C a b ſimilia evadunt, & ſubtangentes C B, C b, ſeu his æquales A K, I L in eadem radiorum A C, C a, vel C I ratione; Unde habes confirmationem eorum, quæ *cap. præced. num.* 10. *&* 11. circa hujus ſpatii comparationem attulimus.

13 Hanc igitur tot exemplis illuſtrem doctrinam ad propoſitum applicantes, ſeptimum Hugenii Theorema ſic demonſtra-

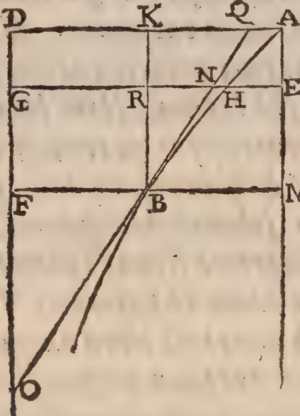
ſtrabimus. Subtangentes Logiſticæ A a a C ſint N B, n b, n b, quæ ad reſpectiva puncta A, r, r applicatæ A N referantur in A G, r o, r o; eſt igitur figura N A G o O æqualis ſpatio poſt ordinatam A N, aſymptoto, & curvæ interjecto, juxta hanc doctrinam; verùm & idem ſpatium N A G convincitur eſſe rectangulum ſubtangentis N B in ordinatam



N A, eò quòd ex dictis *cap.* 5. ſubtangentis longitudo N B, n b, ſive jam A G, r o, ſit ſemper eadem; itaque ſpatium infinitum, quod poſt quamvis Logiſticæ ordinatam exporrigitur, æquale eſt rectangulo ſub eadem ordinata, & ſubtangente, atque adeò eſt duplum trianguli ejuſdem baſis, & altitudinis, quod ordinata, tangente, & ſubtangente comprehenditur, utì Clariſſimus Auctor in hoc Theoremate nobis demonſtrandum propoſuit.

14 Sed & ſequens Theorema octavum, videlicet, quòd *ſpatium duabus ordinatis interjectum æquale eſt rectangulo ſubtangentis in differentiam earumdem ordinatarum, utì in ſequenti figura ſpatium A D F B æquatur rectangulo ſubtangentis F O in K A*, quod quidem *cap.* 4. *num.* 4. ſatis oſtenſum eſt, at-

atque ex iis, quæ aliàs diximus, facilè oſtendi poteſt, ex hac ipſa doctrina iterum ex abundanti demonſtrari poteſt, quippe in figura paragraphi antecedentis, nedum totum ſpatium infinitum C A N B toti rectangulo N A G O probatur æquale, ſed & ejus pars quælibet N A a n parti



correſpondenti A r o G, ex ſubtangentibus curvæ A a ad ipſam A r applicatis genitæ, quæ eſt rectangulum ſubtangentis in differentiam ordinatarum; nec juvat ampliùs hìc immorari. Ad ſolida tranſeamus.

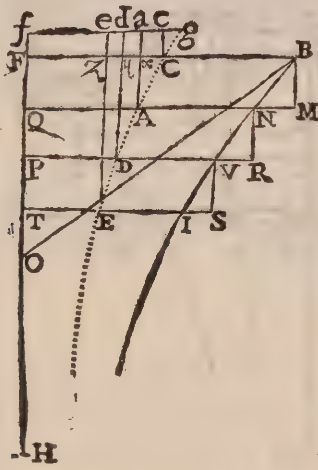
* *
*

CAPUT IX.

Prima Noni Theorematis demonſtratio. Hinc ſolida omnia ex infinitis Logiſticæ ſpatiis eſſe oſtenduntur, ut quadrata radiorum baſis, & portiones, ut differentiæ quadratorum à radiis extremis. Alia Logiſtica in duplicata ordinatarum prioris ratione ſpatium comprehendit prioris ſubduplum, item ſubtangentem ſubduplam habet: generaliter quæcumque fuerit Logiſtica, ejus ſpatium, & ſubtangens tam ſubmultiplex erit prioris, quàm ſubmultiplicata ordinatarum ratio. Idem nonum Theorema ſecundò demonſtratur. In Correlatis figuris ſolidum ab exteriori duplum ſemper eſt ſolidi, quod ab interiori circa axem revoluta deſcribitur, & partes partium reſpondentium. Hinc tertia ejuſdem Theorematis demonſtratio. Dimenſio ſolidi ex figura quadranti correlata, ejuſve partibus tum concavis, tum convexis, item ſolidorum ex trilineo cycloidis, ipſave ſemicycloide circa tangentem verticis revoluta, ejuſque partium. Solidorum quoque ex ſpatio Ciſſoidis concavo, aut convexo, tum circa aſymptoton, tum circa ei parallelam ex vertice. Conoidum ex infinitis parabolis ad circumſcriptos cylindros, vel conos, item ſolidorum ab infinitis hyperbolis ratio ad inſcriptos cylindros nota.

1 IN hoc nono Theoremate ita pronunciat Hugenius: *Solidum*, inquit, *productum ab infinito ſpatio poſt aliquam ordinatam in converſione circa aſymptoton eſt ſeſquialterum Coni, cu-*

cujus altitudo æquetur ſubtangenti, & baſis ſemidiameter æqualis ſit ordinatæ: ita ſolidum productum ab infinito ſpatio B F O I in converſione circa F O, ſeſquialterum eſt Coni geniti ex triangulo B F O circa eamdem F O revoluto. Hujus prima demonſtratio ſic inſtitui poteſt. Intelligantur huic ſolido circumſcripti innumeri cylindri F M, Q R, P S, &c. æqualis ubique altitudinis F Q, Q P, P T, &c. indefinitè exiguæ, itaut horum

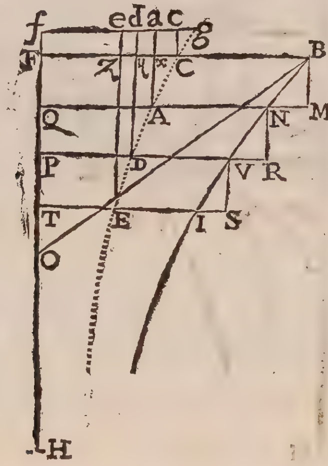


cylindrorum congeries pro ipſo rotundo ſolido ſumi queat, & tangentis O B portiuncula primo cylindro F M intercepta ferè cum ipſa curva B N coincidat, ſeu ad ipſam obtineat rationem minorem qualibet inæqualitatis majoris ratione aſſignabili (hoc enim ex vulgatis methodis fieri poteſt) deſignetur etiam O H æqualis ſubtangenti O F.

2 Jam ſic: Hæc ſeries cylindrorum, qui inter ſe ſunt, ut baſium F B, Q N, P V continuè proportionalium quadrata, eſt quædam Geometrica progreſſio ſolidorum proportionaliũ in infinitum continuata; igitur ex demonſtrationibus, ſive Cavallerii, ſive Torricellii, ſive Gregorii à S. Vincentio, omniũ terminorum aggregatum (ideſt rotundum ſolidum, de quo loquimur) erit ad primũ terminũ (ſcilicet ad cylindrum M F)

 ut

ut ipſe primus terminus ad primam differentiam, hoc eſt, ut quadratum FB ad ejuſdem differentiam à quadrato QN, vel ut quadratum FO ad rectangulum HQF, quo differt ipſum quadratum FO ab OQ ex vi conſtructionis, & hypotheſis præmiſſæ. Cùm ergo ratio ſolidi rotundi ad inſcriptum conum, ex triangulo BOF genitum, componatur ex ratione talis ſolidi ad primum cylindrum FM, & ex ratione ejuſdem

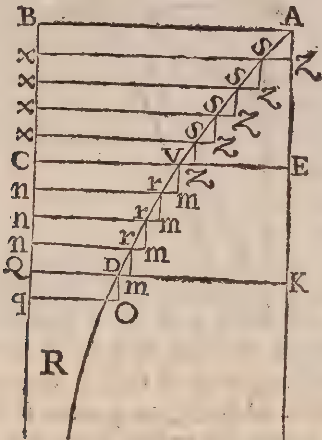


cylindri FM ad conum FBO, quarum prima, ex dictis, eſt eadem, quæ OF quadrati ad rectangulum HQF, ſecunda verò eadem eſt, quæ QF ad trientem altitudinis OF propoſiti coni, aut rectanguli HQF ad HQ in trientem OF, ideò erit ſolidum rotundum Logiſticæ ad prædictum conum ut quadratum OF ad rectangulum HQ in trientẽ OF, nempe in compoſita ratione ex OF ad QH (quæ eſt ratio ſubdupla, propterea quòd HQ differat ab HF differentia QF indefinitè parva, & re ad minimos cylindros redacta, penitus evaneſcente) & OF ad trientem ſui, quæ eſt ratio tripla; ex his autem compoſita ratio eſt ſeſquialtera, ut patet in his numeris 3, 6, 2, itaque ſolidum ex Logiſtica circa axem FO revoluta ſeſquialterum eſt Coni ex inſcripto, & per tan-

gen-

gentem determinato triangulo FBO. Quod erat demonſtrandum.

3 Hinc nullo negotiò deducitur, rotundum ſolidum à ſpatio poſt AB infinito, ad ſolidum rotundum à ſpatio item infinito poſt aliam ordinatam CV ad invicem eſſe, ut quadrata

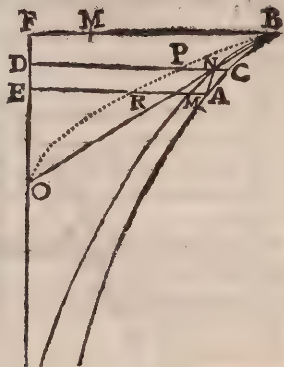


BA, CV, quippe & horum ſolidorum ſubſeſquialteræ magnitudines, nempe inſcripti coni, ob eamdem altitudinẽ ſubtangentis, ſunt ad invicem, ut quadrata radiorum baſis; necnon ſolida ex portionibus AVCB, BADQ eſſe ad invicem, ut differentias quadratorum AB, CV, & AB, QD, ſive, ut armillas circulares ab VE, & DK circa BQ revolutis deſcriptas, vel hæc ſolida ad invicem eſſe, ut reſpondentia ſpatia geometricæ ſpiralis, per hujus Logiſticæ convolutionem, axe BC in punctum contracto, provenientia; quæ omnia etiã argumentis *cap.* 3. adductis in demonſtratione primi Theorematis, confirmari potuiſſent, intellectis nimirum loco parallelogrammorum Bz, xz, &c. totidem cylindris, eademque prorſus demonſtratione applicata.

4 Nobis aliam hujus veritatis demonſtrationem meditantibus illud oſtendendum occurrit, quòd ſi intra Logiſticam BCA deſcribatur ad eamdem aſymptoton, eamdemque

or-

ordinatam F B alia Logiſtica B N M, cujus ordinatæ ſint, ut quadrata prioris Logiſticæ, faciendo nimirum ubique, ut F B



ad D C, ita D C ad D N, & ut F B ad E A, ita E A ad E M, &c. Spatium à Logiſtica F B N M comprehenſum ſubduplum erit ſpatii à Logiſtica F B C A comprehenſi; ſumpta enim quavis ordinata D N C, ac poſita E F dupla F D, ordinetur E M A; eſt igitur in priori Logiſtica F B ad D C, ut D C ad E A; ſed etiam ex conſtructione ita D C ad D N ordinatam poſterioris Logiſticæ; æquales ſunt igitur D N, & E A; & hoc ſemper; ordinantur autem E A in ſpatio F B C A ad altitudinem E F ſemper duplam altitudinis F D interceptæ ab æquali ordinata D N in ſpatio F B N M; igitur ex Propoſit. 1. noſtræ Appendicis ad Demonſtr. Vivian. Probl. erit ſpatium F B C A duplum ipſius F B N M. Q. e. d.

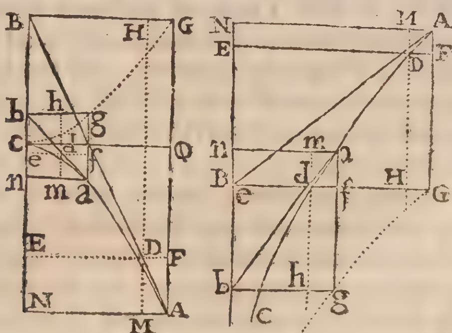
5 Colliges ſpatium F B N M æquale eſſe triangulo F B O per tangentem prioris Logiſticæ B O determinato, ſiquidem & hujus duplum eſt, ex Theoremate ſeptimo Hugeniano, idem ſpatium F B C A; necnon evidens eſt, ſubtangentem Logiſticæ poſterioris F B N M fore ſemiſſem ipſius O F, quippe ejus rectangulum in F B æquale foret ſpatio F B N M, uti & prædicto triangulo; imò generaliter, quàm ſubmultiplicata fuerit ratio ipſarum D N, D C, rationis D N, F B, tam ſubmultiplex fore ſpatium à Logiſtica B N M comprehenſum

ſpa-

ſpatii comprehenſi ab ipſa B C A , & tam ſubmultiplices pariter fore ſubtangentes hujus, ſubtangentium illius.

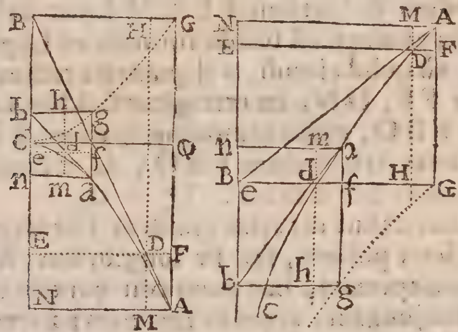
6 Ut altera igitur propoſiti Theorematis demonſtratio compleatur, triangulo O F B ad verticem O inſcriptum eſto trilineum parabolicum O R P B F, cujus ad verticem tangens O F; manifeſtum eſt, Conum ex O B F circa F O proportionaliter analogum eſſe trilineo O P B F, quippe, ut circuli, vel quadrata radiorum B F, N D, ita lineæ B F, D P; quemadmodum & ſpatium F B N M ſupra deſcriptum proportionaliter analogũ eſt ſolido rotundo ex Logiſtica F B C A circa F O, eò quòd circuli, vel quadrata radiorum F B, D C ſint ut lineæ F B, D N; ita erit igitur ſolidum ex F B C A ad Conum ex F B O, quemadmodum ſpatium F B N M, ideſt ex *præced. num.* triangulum F B O, ad trilineum F B P O; nempe in ratione ſeſquialtera. Q. e. d.

7 Duas alias adhuc diverſas ejuſdem Theorematis demonſtrationes afferre poſſem, ſed ne longior ſim, & alteri longè utiliori locum aperiam, hac dumtaxat contentus ero, quam tertio loco ſubjungam, atque ut Lectores patienter attendant enixiùs rogabo. Semen fœcundiſſimum eſt, unde illa pullulat, quippe illi, quod *præc. cap. nu.* 2. ſevimus, atq; unde tot fructus



abundè collegimus, agnatum penitus, atque congeneum eſſe reperies. Sint igitur eædem Correlatæ figuræ, quas loco citato deſcripſimus, g G A a C, & N A a C; utraque autem circa

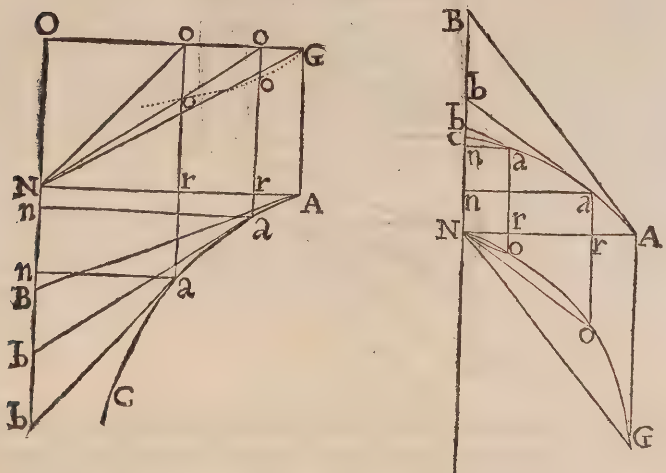
ca axem N B convertatur; ajo ſolidum à ſpatio primo, & exteriori productum duplum eſſe ſolidi à ſecundo, & interiori ſpatio geniti; facta enim eadem, ut priùs, conſtructione, cùm parallelogrammum N F æquale ſit ipſi M G, utroque circa N B revoluto, cylindrus ex primo erit ad tubum cylindricum genitum ex ſecundo, ut dimidia N A (quæ eſt diſtantia centri



gravitatis ipſius N F ab axe motus) ad mediam arithmeticam inter M N, & A N (quæ eſt diſtantia centri gravitatis M G ab eodem axe) hæc autem media arithmetica in parallelogrammis infinitè exiguæ latitudinis, atque adeò in ipſiſmet ſolidis, in quæ tandem deſinunt tubi illi cylindrici, punctis M, A, coincidentibus, & omni latitudine M A penitus evaneſcente, eſt ipſiſſima linea N A; itaque, cùm idem ratiocinium valeat in omnibus aliis cylindris ex n f, & tubis cylindricis ex m g in tali converſione ſpatiorum genitis, erit ſemper unuſquiſque cylindrus ſolidi ex interiori figura ad quemlibet tubum ſolidi ex figura exteriori, ut dimidia N A ad totam N A, ut dimidia n a ad totam n a, ſemper nimirum in ratione ſubdupla; ſolidum igitur ex interiori figura C a A N eſt ſemiſſis ſolidi ex figura exteriori g G A a C. Quod erat demonſtrandum.

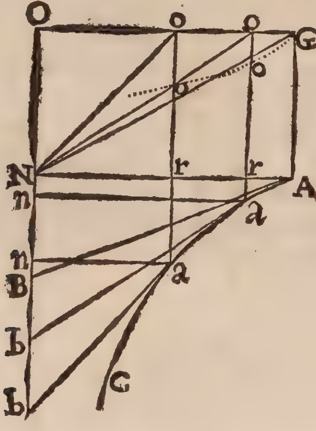
8 Di-

8 Directè autem depreſſis, aut evectis lineis ſingulis A G, a g, ut jam non ad ipſam curvam A a C, ſed ad baſim N A ipſarum extrema pertingant, quemadmodum *cap. præcedenti num.* 3. monuimus non variari figuræ quantitatem, ſed eamdem eſſe figuram N o o G A hinc provenientem, ac quæ



priùs erat g G A a C, ita pariter conſtat, idem ſolidum ex ipſa o o G A N circa N B revoluta proventurum, quod priùs ex g G A a C, propter ſervatam eamdem linearum A G, & O r tum longitudinem, tum diſtantiam ab axe motus, adeòque eaſdem cylindricas ſuperficies hæc ſolida componentes; duplum eſt igitur ſolidum ex figura o o G A N, ſolidi ex C a A N (facta circa N B utriuſq; rotatione) deſcripti; imò & partes partium reſpondentium, videlicet ſolidum, quod ex portione N r o, duplum ſolidi ex C a n (acceptis o r, & n a homologis, ſcilicet in idem a punctum convenientibus) & quod ex o r A G, duplum ejus, quod ab A a n N, ob eamdem rationem.

9 Tertia igitur propoſiti Theorematis Hugeniani demonſtratio ſic expedietur. Eſto Logiſtica A a C. Conſtat ex dictis *cap. præced. num.* 13. ei Correlatam figuram eſſe parallelogrammum N A G O, quod ſi circa axem Logiſticæ rotetur

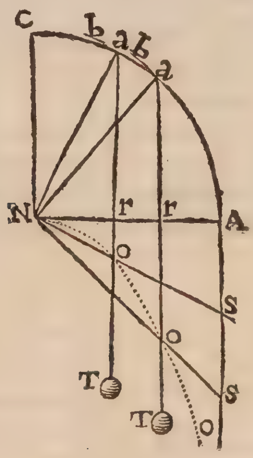


cylindrum producet triplum coni ab inſcripto triãgulo N A B ejuſdem baſis, & paris altitudinis; cùm igitur ex ea, quam hìc adduximus, doctrina ſolidum ex Logiſtica circa axem ſit ſubduplum præfati cylindri ex parallelogrammo N A G, erit ſolidum Logiſticæ ad conum illum inſcriptum in ratione compoſita ex ſubdupla, inter ipſum, & cylindrum intercedente, & ex tripla inter cylindrum, ac dictum conum reperta; Ratio autem ex his compoſita (ut ad finem *num.* 2. indicavimus) eſt ſeſquialtera; quare, &c.

10 Sed & hinc pariter conſtat dimenſio portionum ejuſdem ſolidi, putà ejus, quæ à parte n a A N circa n N rotata generatur, quippe quæ demonſtretur ſemiſſis tubi cylindrici ex correſpondente parallelogrammo A r o circa eumdem axem converſo geniti, ideſt æqualis cylindro, baſi differentia circulorum A N, N r, altitudine vero ſemiſſe ſubtangentis; indeque ſubtracto cylindro ab inſcripto parallelogrammo n a r, reſiduũ æquale erit annulo ex ſpatio trilineari a r A circa axem re-

revoluto, quod proinde notam rationem habebit, ſive ad aliũ annulum a r A, ſive ad tubum cylindricum ex parallelogrammo; quod ſibi circumſcriberetur; & hoc *cap. 7. num.* 14. deſiderabatur ad ſpatia quædam trilinearia Spiralis Geometricæ, tum ad invicem, tum ad circumſcriptas armillarum circulariũ portiones comparanda, ut ex ibi dictis conſtat. Calculum ineat qui volet. Nobis colligendi ſunt fructus ex doctrina *num.* 7. & 8. indicata uberrimè manantes, imò veriùs Lectoribus indicandi, ne voluptatem illos per ſe decerpendi eiſdem invidiſſe videamur.

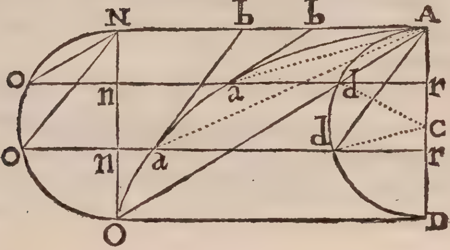
11 In primis igitur in figura quadranti Correlata, *cap. præc. num.* 6. deſcripta, patet, nedum integrum ſpatium S A N o O circa N C revolutum, producere ſolidum æquale ſpheræ radio N A deſcriptæ, quippe duplum hemiſpherii ex converſione quadrantis C A N; ſed & quarum ſpheræ portionum



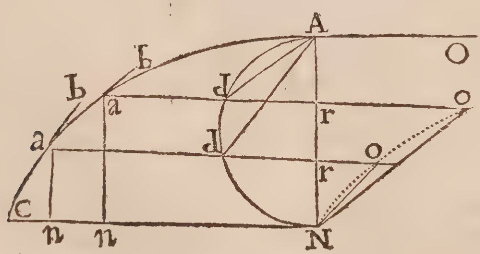
duplæ ſint portiones ejuſdem ſolidi à partibus concavis N o r deſcriptæ, ac conſequenter cui ſolido æquales conoides à convexis etiam portionibus, curva N o, & axe C N producto interceptis, ordinataque ex o ipſi r N parallela terminatis, & circa eumdem axem converſis, & tam facile erit, ſive aliquod

quod ex hujuſmodi conoidibus, ſive ex ſolidis à ſpatio cõcavo deſcriptis in data ratione dividere, quã facile eſt in ſpheræ portionibus, & reſiduis cylĩdrorũ illas circũſcribentiũ idẽ præſtare.

12 Cycloide O a A N circa tangentem verticis A N revoluta, patet ſolidum inde proveniens eſſe ſubduplum annuli ex



ſemicirculo N o O circa eamdem tangentem converſo: unde & reſiduum cylindri illi ſolido circumſcripti, ideſt ſolidum, quod ex ſemicycloide convexa O a A D circa tangentem verticis converſa deſcribitur, notæ dimenſionis erit, imò & ejus partium menſura innoteſcet: quæ jam pridem inter Geometras magna ſollicitudine quæſita fuiſſe video. Idem in Ciſſoide præſtandum, cujus quidem ex nota proprietate linearum

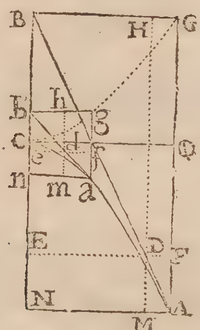


Ar, rd, rN, ro proportionalium, obvia eſt dimenſio ſoli-

di

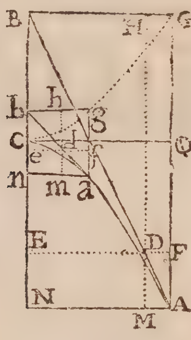
di ejus converſione circa aſy nptoton A O deſcripti, quippe uti rectangula A r o, d r N æqualia inde oſtenduntur, adeò que & cylindricæ ſuperficies ab iis deſcriptæ, ita integrum illud Ciſſoidale ſolidum, integro annulo ex ſemicirculo genitore circa tangentem in N revoluto, & partes partibus correſpondentibus æquari manifeſtum eſt; ex noſtra verò doctrina manifeſta etiam evadit dimenſio ſolidi ex eodem cavo ciſſoidali ſpatio o o N A O circa N n revoluto, ejuſque partium, per comparationem ad fuſum Cycloidale ex C A N, ejuſque partes; imò & innoteſcet dimenſio Conoidum ex ſpatiis convexis, curva N o o, & axe n N producto, ac ordinata ex o ipſi r N parallela terminatis, quippe reſidua cylindrorum ex rectangulis N r o productorum. Solidum ex Tractoria ſubduplū pariter invenies hemiſpherii ex quadrãte ſibi correlato, &c.

13 In parabolis cujuſvis generis C a A, Conoides ex figura C A N circa axem C N habebit ſemper ad circumſcriptum cylindrum ex C Φ N A rationem notam; nota quippe eſt ratio axis N C ad ſubtangentem N B, unde



& ratio cylindri ex C Φ N A ad cylindrum ex B G A N, quæ eadem eſt; cylindrus autem B G A N componitur ex ſolido ex C g G A N (quod ſemper eſt triplum Conoidis ex C A N, quippe ſolidum ex C a A G g hujus ſemper eſt duplum) & ex conoide ex C g G B, cujus ratio ad ipſum

ſum CAN eadem ſemper eſt, quæ CB ad CN, cb ad cn, juxta Propoſit. 1. Append. noſtræ Vivian. Probl. adeòque eſt ad illum in quadratica, ut 1 ad 1. in cubica, ut 2 ad 1. in quadratoquadratica, ut 3 ad 1, &c. in ea, in qua cubi ordinatarum ſunt, ut quadrata ex ſagittis, ut 1 ad 2, & univerſaliter ſi ordinatarum exponens ſit x; partium verò axis y, ut x minùs y ad y; itaque ſemper cylindrus ex BGAN erit ad conoidem ex parabola CAN circa axem revoluta, ut $3y + x - y$ ad y; ſcilicet in quadratica, ut 4 ad 1. in cubica, ut 5 ad 1. in ſequenti, ut 6 ad 1, &c. in ea, in qua cubi ordinatarum reſpondent quadratis ſagittarum, ut 7 ad 2. in qua verò quadratoquadrata reſpondent cubis, ut 10 ad 3, &c. Vel ſic etiam calculus inſtitui poteſt;

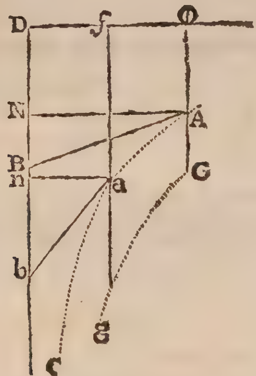


quoniam cylindrus ex BGAN triplus eſt coni ex triangulo BAN; ſolidum item ex CgGAN triplum Conoidis CAN; reliqua etiam conois ex CgGB tripla erit ſolidi ex trilineo CAB; eſt verò, ex dictis, Conois CAN ad Conoidem CgGB convertendo, ut y ad $x - y$; ergo ex æquo Conois CAN ad ſolidum ex trilineo CAB eſt, ut y ad $\frac{x-y}{3}$ ſive, ut $3y$ ad $x - y$; & componendo, ac per converſionem rationis, conus BAN ad conoidem ex inſcripta parabola, ut $2y + x$ ad $3y$; nempe in quadratica, ut 4 ad 3, in cubi-

bi-

bica, ut 5 ad 3, in quadratoquadratica, ut 6 ad 3, in ea, in qua cubi comparantur quadratis, ut 7 ad 6, &c.

14 Non difficilior infinitarum hyperbolarum tractatio erit. Sit quævis hyperbola C a A inter aſymptotos B D Φ; & huic correlata figura g G, cujus ordinatæ A G, a g æquales ſubtangentibus N B, n b. Quoniam ex dictis *cap.* 7. *num.* 9. eſt



D N ad N B, ſeu Φ A ad A G perpetuò, ut exponens ordinatarum A Φ ad exponentem diſtantiarum Φ D, videlicet, ut x ad y; etiam ſolidum ex ſpatio C a A Φ D circa D B ad ſolidum ex g G A a C circa eumdem axem, (quippe quorum cylindricæ ſuperficies à lineis Φ A, A G, & f a, a g eamdem perpetuò rationem obſervant) ut x ad y; unde idem antecedens ſolidum, ad ſolidum ex C a A N, quod eſt juxta noſtram doctrinam, ſolidi conſequentis ſubduplum, erit ut x ad $\frac{1}{2}y$; vel ut $2x$ ad y; & dividendo, cylindrus ex inſcripto parallelogrammo Φ A N D ad ſolidum ex ſpatio infinitè longo C a A N erit, ut $2x - y$ ad y; ſcilicet in prima hyperbola, ut 1 ad 1 (utì jam Torricellius oſtendit) in ſecunda, ſeu quadratica, ut 3 ad 1, in tertia, ſeu cubica, ut 5 ad 1, in quarta, ſeu quadratoquadratica, ut 7 ad

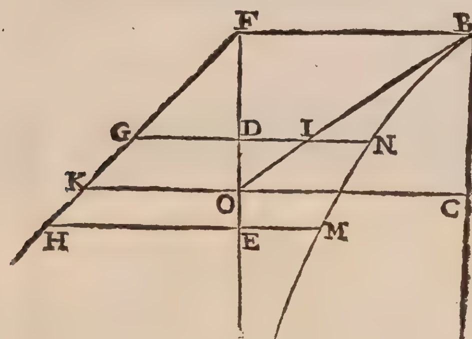
ad 1; & ſic ſemper, ſumpto antecedente juxta imparium numerorum progreſſionem; quod ſi cubi ordinatarum ad diſtantiarum quadrata comparentur, ratio invenietur, ut 4 ad 2, ſeu 2 ad 1; ſi quadratoquadrata illarum ad iſtarum cubos, ut 5 ad 3, &c. Alia exempla, aliæque ſpeculationes non deerunt, ſi Lectoris induſtria hiſce veſtigiis inſiſtens in feraciſſimos Geometriæ campos ſe conferet.

CAPUT X.

Decimum Theorema proponitur, ac prima demonſtratione ſtabilitur. Infinita ſeries terminorum proportionalium æquatur maximo ducto in exponentem rationis, ac diviſo per eumdem exponentem unitate minutum. Ex hoc demonſtrandi modo, tum finitæ, tum infinitæ ſeries æquales oſtenduntur ſumma, vel differentiæ duarum poteſtatum, per ſummam, vel differentiam radicum diviſæ, &c. Solidum rotundum, de quo in hoc Theoremate, per infinitæ ſeriei calculum admenſuram redigitur. Subtangentes Logiſticæ in ordinata acceptæ ſunt, ut rectangula Logiſticæ inſcripta. Solidum ex quovis Logiſticæ ſpatio circa ordinatam revoluto ad inſcriptum cylindrum eſt, ut congruum trilineum ad inſcriptum triangulum. Hæc ratio nota eſſe oſtenditur. Annulis quoque latis per hæc ſpatia progenitis demonſtratio applicabilis eſſe indicatur.

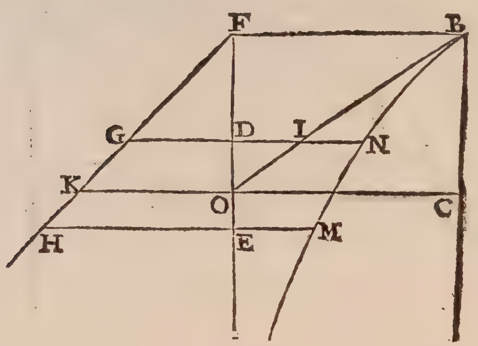
De-

1 DEcimum Auctoris noſtri Theorema inventu, fateor, difficillimum mihi fuit, duas tamen, aſpirante Geometriæ Præſide, ejus demonſtrationes, eo, quod ſequitur, medio tandem extundere potui: *Solidum*, inquit, *productum ab eodem infinito ſpatio in converſione circa ordinatam B F, poſt quam exporrigitur, ſextuplum eſt Coni geniti ex triangulo B F O in converſione circa B F.* Fiat enim angulus E F H ſemirectus,



& ordinatæ N D, M E in Logiſtica extendantur ad lineam F H in G, H. Concipiatur modò ſolidum ex triangulo H F E, (ad partes H E indefinitè protenſo ſimul cum Logiſtica) in ſpatium Logiſticæ F B M E, quod conflabitur ex totidem rectangulis G D N, H E M, &c. Aut etiam, ut in Vivianeis indicavimus ad Schol. propoſ. 6. pag. 51. Spatium Logiſticum F B N M ita erectum, ut perpendiculare fiat plano H F E, per quod motu ſibi ſemper parallelo fluere intelligatur, ut partes ipſius Logiſticæ lineam F H prætergredientes deinceps evaneſcant, itaut, cùm Logiſtica attigerit punctum G, ejus portio F D N B defæcerit, ſolaque remanſerit reſidua poſt D N versùs E M in infinitum protenſa, ubi verò attigerit punctum H, defæcerit pars E F B M, ſolaque re-

ſidua fuerit quæ poſt E M in infinitum extenditur, &c. Jam conſtat ex prima geneſi, hoc ſolidum fore ad rotundum ex Logiſtica circa ordinatam B F revoluta, ut radius cujuſpiam circuli ad ejus circumferentiam; quæ enim lineæ D N , E M in ſolido ſupra deſcripto ducerentur in G D , H E, æquales ipſis D F , E F , in rotundo ſolido circa F B ducerentur in peripherias ab eiſdem radiis D F , E F , deſcriptas in rotatione earumdem ordinatarum D N , E M. Rurſus ex ſecunda geneſi ejuſdem priùs deſcripti ſolidi , patet illud fore æquale



priſmati altitudine ſubtangentis O F , baſi verò integro Logiſticæ ſpatio F B N M , ideſt, per dicta *cap.* 8. in demonſtratione Theorematis ſeptimi , baſi ipſo rectangulo O F B. Ratio eſt , quia ſolidum illud , juxta ſecundam geneſim conſideratum,habet pro baſi ſpatium F B M , & ad punctum G , ſive ad altitudinem G D habet ſectionem baſi parallelam ſpatium infinitum poſt D N extenſum , ſicut & ad altitudinem E H ſpatium infinitum extenſum poſt E M , &c. quemadmodum & priſma,baſi ſpatio F B N M, altitudine O F , ſecari poſſet in rectangulum , O F B æquale ipſi F B M , & ad diſtantiam F D (æqualem D G) ſecaretur in rectangulum ex O F in D N æquale ſpatio infinito poſt D N , necnon & ad diſtantiam E F

(æqua-

(æqualem EH) in rectangulum ex OF in EM æquale ſpatio poſt EM infinitè protenſo, &c.

2 Ratio igitur ſolidi rotundi ex ſpatio FBME circa FB rotati ad conum ex triangulo OBF, utpote compoſita ex ratione dicti ſolidi rotundi ad priſma altitudine OF, baſi ſpatio FBM; vel rectangulo OFB, & ex ratione hujus ipſius priſmatis ad dictum conum, componetur ex ratione circumferentiæ radii OF ad radium OF, (vel, aſſumpta communi altitudine OC, dicas ex ratione cylindricæ ſuperficiei deſcriptæ ab OC ad rectangulum FOC) & ex ratione dicti priſmatis ad deſignatum conum (ſcilicet ex compoſita rurſus ex ratione rectanguli FOC ad triangulum FOB, & ex OF altitudine priſmatis ad circumferentiam ex triente OF, quæ eſt diſtantia centri gravitatis trianguli ejuſdem ab axe motus, juxta celeberrimam regulam Guldinianam, ſeu dicas ex ratione trianguli ejuſdem OFB ad triangulum ex triente circumferentiæ ab OF deſcriptæ in ipſam OF, vel OC) hæ autem rationes componunt rationem ſextuplam; cylindrica ſiquidem ſuperficies ab OC in converſione circa FB deſcripta (quæ eſt primus terminus) cùm tripla ſit cylindricæ ſuperficiei ejuſdem altitudinis in trientem dumtaxat peripheriæ ex OF, ſive in peripheriam trientis OF, ſextupla erit trianguli ex tali triente circumferentiæ in OC, vel FB (quod eſt ultimus terminus) utpote ſubdupli cylindricæ ſuperficiei ejuſdem altitudinis, & baſis. Solidum igitur rotundum ex Logiſticæ ſpatio FBM circa FB revoluto, ſextuplum eſt Coni ex OFB triangulo inſcripto circa eamdem ordinatam rotato. Quod erat demonſtrandum.

3 Alia ejuſdem Theorematis demonſtratio aſſumptum hoc, jam inter Geometras pervulgatum, præſupponit, quòd ſcilicet quælibet infinita ſeries terminorum continuè proportionalium æqualis eſt maximo termino ducto in exponentem rationis, & diviſo per eumdem exponentem unitate minutum; ſit verbigratia communis ratio infinitorum terminorum illa, quam habet a ad 1; ſitque maximus terminus m; erunt igitur termini iſti per ordinem

 m,

$m, \frac{m}{a}, \frac{m}{aa}, \frac{m}{e^3}, \frac{m}{e^4}$, &c. in infinitum: dico omnes ſimul æquari $\frac{ma}{a-1}$; multiplicentur enim ſinguli ex propoſitis terminis per $a-1$: fiet $ma-m, +m-\frac{m}{a}, +\frac{m}{a}-\frac{m}{aa}, +\frac{m}{aa}-\frac{m}{a^3}$, &c. ubi conſtat, omnes terminos poſt ma ſe mutuò elidere, qui enim priùs negantur, iidem immediatè poſt affirmantur; atque adeò omnes æquantur ſoli priori producto ma; igitur è contra dividendo per $a-1$, fient $m+\frac{m}{a}, +\frac{m}{aa}+\frac{m}{a^3}+\frac{m}{a^4}$, &c. in infinitum æquales $\frac{ma}{a-1}$ quod enim multiplicatio conficit, hoc ipſum diviſio retexit. Vel ſic: In propoſitis terminis proportionalibus, ut una differentia ad unum terminum (putà ut $a-1$ ad a) ita omnes ſimul differentiæ (ideſt ipſe maximus terminus m, in quo differentiæ omnes includuntur) ad omnes terminos, qui propterea æquales eſſe debent $\frac{ma}{a-1}$. Q. e. d.

4 Priorem demonſtrandi modum, qui clarior eſt, atq; me judice, omnium facillimus, indicavi jam in Vivianeis ad finē pag. 150. atque expeditiſſimum innumeris veritatibus demonſtrandis Lector inveniet, ſi in illo ſemet tantiſper exercere non dedignetur. Exempli cauſa in ſeriebus finitis, deprehendet diffetentiam quarumlibet homogenearum poteſtatum, diviſam per differentiam radicum earumdem, æquari aggregato tot terminorū continuè proportionaliū, uno gradu depreſſiorū, quot fuerint unitates in earum poteſtatum exponente; putà

$$\frac{aa-bb}{a-b} = a+b$$

$$\frac{a^3-b^3}{a-b} = aa+ab+bb$$

$$\frac{a^4-b^4}{a-b} = a^3+aab+abb+b^3$$

&c.

mul-

multiplicando enim per $a - b$ terminos primæ æquationis, fit $aa - ab + ab - bb = aa - bb$, ob reliquos terminos ſe mutuò elidentes; item multiplicando terminos æquationis ſecundæ, habetur $a^3 - baa + baa - abb + abb - b^3 = a^3 - b^3$ ob eamdem rationem; ſimiliter in aliis idem eveniet. Differentiam autem quarūlibet homogenearum poteſtatum gradus à numero pari denominati, vel ſummam gradus denominati ab impari numero, diviſam per ſummam radicum, æqualem deprehendes aggregato ſimilium terminorum, ut ſupra, ſed alternatis affirmationis, & negationis ſignis: verbi gratia

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$$

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = aa - ab + bb$$

$$\frac{a^4 - b^4}{a + b} = a^3 - aab + abb - b^3$$

$$\frac{a^5 + b^5}{a + b} = a^4 - a^3 b + aabb - ab^3 + b^4$$

&c.

Nam multiplicando terminos per denominatorem $a + b$ fit in prima æquatione $aa + ba - ba - bb = a^2 - b^2$, in ſecunda æquatione fit $a^3 + baa - aab - abb + bba + b^3 = a^3 + b^3$ cæteris ſe elidentibus; in tertia, & quarta, aliiſque infinitis idem proveniet.

5 In ſeriebus autem infinitis: proponatur ſumma quarumvis poteſtatum diviſa per differentiam radicum; dico æquari tot terminis uno gradu depreſſioribus, & continuè proportionalibus, quotus eſt poteſtatum gradus, cum dupla ſerie infinitarum fractionum ſimiliter proportionalium,

pu-

putà $\frac{aa+bb}{a-b} = a+b+\frac{2bb}{a}+\frac{2b^3}{aa}+\frac{2b^4}{a^3}$ &c.

Hos quippe multiplicando per $a-b$, habes

$$aa-ba+ba-bb+2bb-\frac{2b^3}{a}+\frac{2b^3}{a}-\frac{2b^4}{aa}+\frac{2b^4}{aa} \text{ \&c.}$$

ubi, retractis iis, qui ſe elidunt, remanet $aa+bb$. Similiter

$$\frac{a^3+b^3}{a-b} = aa+ab+bb+\frac{2b^3}{a}+\frac{2b^4}{aa}+\frac{2b^5}{a^3} \text{ \&c.}$$

hos enim multiplicando per $a-b$ fiet

$$a^3-baa+baa-abb+abb-b^3+2b^3-\frac{2b^4}{a}+\frac{2b^4}{a} \text{ \&c.}$$

ubi, remotis contradictoriè oppoſitis, habetur a^3+b^3 &c. Idem ferè contingit, ubi poteſtatum paris gradus ſumma, vel imparis gradus differentia dividitur per ſummam radicum; niſi quòd ſigna tunc ſunt alternanda; ut

$$\frac{aa+bb}{a+b} = a-b+\frac{2bb}{a}-\frac{2b^3}{aa}+\frac{2b^4}{a^3} \text{ \&c. in infinitum.}$$

$$\frac{a^3-b^3}{a+b} = aa-ab+bb-\frac{2b^3}{a}+\frac{2b^4}{aa}-\frac{2b^5}{a^3} \text{ \&c.}$$

$$\frac{a^4+b^4}{a+b} = a^3-aab+abb-b^4+\frac{2b^4}{a}-\frac{2b^5}{aa} \text{ \&c.}$$

Sic etiam

$$\frac{aa}{a\pm b} = a\mp b+\frac{bb}{a}\mp\frac{b^3}{aa}+\frac{b^4}{a^3} \text{ \&c.}$$

$$\frac{a^3}{a\pm b} = aa\mp ab+bb\mp\frac{b^3}{a}+\frac{b^4}{aa}\mp\frac{b^5}{a^3} \text{ \&c.}$$

Non

Non diſſimili ratiocinio demonſtrare ſoleo extractionem radicis Neutoniano modo per ſeries infinitas. Putà ℞ $aa + xx$ (quæ eſt expreſſio generalis ordinatarum ad rectum hyperbolæ latus, exiſtente a ſemitranſverſo, & x diſtantia à centro) vel ℞ $aa - xx$ (quæ exprimit ordinatam quadrantis circuli, cujus radius a, diſtantia ordinatæ à centro x) ſic enim ſeries ordinari ſolet

$$a \pm \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} \pm \frac{3x^6}{48a^5} - \frac{15x^8}{384a^7} \pm \frac{105x^{10}}{3840a^9} \text{ \&c.}$$

ubi ſignum $\pm$ valet $+$ in hyperbola, $-$ in circulo, numeri autem, qui poſt tertium terminum afficiunt numeratores, ſunt per ordinem 3. 3x5. 3x5x7. &c. qui verò afficiunt denominatores, incipiendo à ſecundo termino, ſunt 2. 2x4. 2x4x6. 2x4x6x8. &c. orti ſcilicet, illi quidem ex mutua multiplicatione omnium imparium, hi verò ex multiplicatione mutua omnium parium numerorum per ordinem diſpoſitorum.

Demonſtratur, inquam, id ita eſſe, quia ſi illa ſeries ducatur in ſe ipſam, ſingulis ejus terminis in ſingulos multiplicatis, orietur nil aliud, quàm $aa \pm xx$, adeòque eſt legitima radix ejuſdem: nam ducatur illa ſeries

in a fiet $aa \pm \frac{xx}{2} - \frac{x^4}{8aa} \pm \frac{3x^6}{48a^4}$ &c.

in $\pm \frac{xx}{2a}$ fiet $\pm \frac{xx}{2} + \frac{x^4}{4aa} \mp \frac{x^6}{16a^4}$ &c.

in $- \frac{x^4}{8a^3}$ fiet $- \frac{x^4}{8aa} \mp \frac{x^6}{16a^4}$ &c.

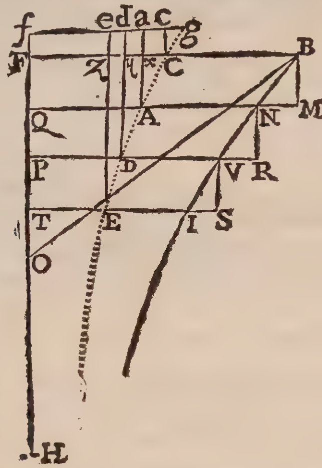
in $\pm \frac{3x^6}{48a^5}$ fiet $\pm \frac{3x^6}{48a^4}$ &c.

&c.

Summa erit $aa \pm xx$ o o &c.

6 Ad

6 Ad propoſitum noſtrum redeuntes, doctrinam *num.* 3. adductam, alteri Theorematis decimi demonſtrationi ſic applicabimus: eſto Logiſtica B V I, tangens ad B ipſa B O, ſubtangens O F, cujus particula infinitè parva F Q accepta,



circumſcribantur æqualis latitudinis parallelogramma F M, Q R, P S, &c. Spatium Logiſticæ ita ſtringentia, ut ſolidum ab ipſa circa F B rotata productum ferè coincidat cum aggregato ſolidorum à talibus parallelogrammis in eadem rotatione deſcriptorum, quorum primus cylindrus ex F M, ſecundus, tertius, & alii deinceps totidem cylindrici tubi ex parallelogrammis Q R, P S, &c. à quibus certè deficere poteſt illud rotundum Logiſticæ ſolidum minori defectu quolibet dato, & ratio, quam de illorum aggregato ad conum ex F O B comparato concludemus, eadem de ipſomet Logiſticæ ſolido demonſtrata eſſe intelligetur. Subtangens igitur F O vocetur *a*, & F Q infinitè parva *d*; O Q autem pro unitate 1 deſignetur, ipſa F B per *b* denominata; cùm ſit igitur (ob indefinitam ipſius F Q parvitatem, & punctum N curvæ cum tangente O B coincidens) F O ad O Q, ſcilicet *a* ad 1, ut

B F

BF ſeu b ad QN, hæc exprimenda erit per $\frac{b}{a}$; & reliquæ lineæ PV, TI, &c. in quibus eadem proportio (ex curvæ natura) continuatur, eò quòd paribus intervallis ſint diſſitæ, erunt per ordinem $\frac{b}{aa}, \frac{b}{a^3}, \frac{b}{a^4}$, &c. in infinitum; altitudines igitur prædictorum ſolidorum conflabunt hanc geometricam ſeriem $b, \frac{b}{a}, \frac{b}{aa}, \frac{b}{a^3}, \frac{b}{a^4}$, &c. baſes autem eorumdem in ratione quadrati primi radii FQ, & mox differentiæ quadrati FP ab FQ, & quadrati FT ab FP, &c. nempe, ut dd, $3\,dd$, $5\,dd$, $7\,dd$, eò quòd differentiæ quadratorum à lateribus arithmeticè proportionalibus ſint, ut impares numeri; hac igitur ſerie per illam multiplicata prodibit ſeries ipſorũ per ordinem ſolidorum $ddb, \frac{3ddb}{a}, \frac{5ddb}{aa}, \frac{7dbb}{a^3}$, &c. quam quidem reſolvere potes in has numero infinitas, prefixis majuſculis litteris ſubnotatas,

$$\text{A} \quad ddb + \frac{ddb}{a} + \frac{ddb}{aa} + \frac{ddb}{a^3} + \frac{ddb}{a^4}, \text{ \&c.}$$

$$\text{B} \quad \frac{2\,ddb}{a} + \frac{2\,ddb}{aa} + \frac{2\,ddb}{a^3} + \frac{2\,dbb}{a^4}, \text{ \&c.}$$

$$\text{C} \quad \frac{2\,ddb}{aa} + \frac{2\,ddb}{a^3} + \frac{2\,dbb}{a^4}, \text{ \&c.}$$

$$\text{D} \quad \frac{2\,ddb}{a^3} + \frac{2\,ddb}{a^4}, \text{ \&c.}$$

$$\text{E} \quad \frac{2\,ddb}{a^4}, \text{ \&c.}$$

quarũ ſumma $ddb + \frac{3ddb}{a} + \frac{5ddb}{aa} + \frac{7ddb}{a^3} + \frac{9ddb}{a^4}$, &c. eadẽ, ut conſtat, quæ priùs.

7 Sunt verò præſcriptæ ſeries terminorum proportionalium, quorum exponens commune a; ſi igitur maximi earũ termini ducantur in a, & productũ dividatur per $a - 1$ (quod hìc juxta conſtructionem eſt quantitas d infinitè parva) habebuntur termini iis infinitis ſeriebus æquales: putà ſeries A æquatur dba; ſeries B æquatur $2db$; ſeries C æquatur $\frac{2db}{a}$ ſeries D æquatur $\frac{2db}{aa}$, & ſic deinceps; ſeries igitur illorum ſolidorum æquabitur progreſſionibus duabus

$$dba + db + \frac{db}{a} + \frac{db}{aa} + \frac{db}{a^3}, \text{ \&c.}$$

$$db + \frac{db}{a} + \frac{db}{aa} + \frac{db}{a^3}, \text{ \&c.}$$

Quippe harum ſumma terminis nuper collectis æquatur

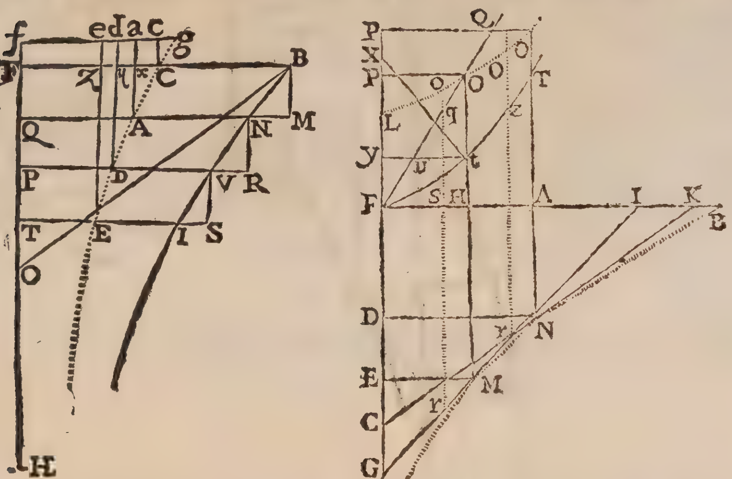
$$dba + 2db + \frac{2db}{a} + \frac{2db}{aa} + \frac{2db}{a^3}, \text{ \&c.}$$

prima autem harum ſerierum (facta eadem multiplicatione) æqualis eſt baa; ſecunda verò æqualis ba (ſive, ut æquè multæ utrobique appareant dimenſiones, addita hinc unitate, dicas $ba1$) eſt verò unitas QO, *fig.* 1. *ſeq.*, ferè = OF, ideſt a, quippe à qua deficit differentia FQ infinitè parva, igitur pro $ba1$ accipi poterit iterum baa; atque adeò ſeries dictorum ſolidorum, ſeu ipſum rotundum ſolidum Logiſticæ, de quo loquimur in hoc Theoremate, optimè exprimetur per $2baa$; Conus autem ex triangulo BOF, utpotè æqualis trienti cylindri circumſcripti [pro circulo accepto radii quadrato, ut in ſolidorum ſerie factum eſt, quod in idem recidit, ob proportionalitatem ſervatam] exprimendus erit per $\frac{1}{3}baa$; ſolidum igitur Logiſticæ ad inſcriptum Conum erit, ut $2baa$ ad $\frac{1}{3}baa$, ſive ut 2 ad $\frac{1}{3}$, vel ut 6 ad 1. Q. e. d.

8 Niſi hic demonſtrandi modus plenè ſatisfecerit, prima oſtenſione contentus, ſecundæ ſaltem conatum lauda, ac mecum progredere ad dimetiendas ejuſdem ſolidi portiones, à partibus videlicet per binas ordinatas reſectis, & circa

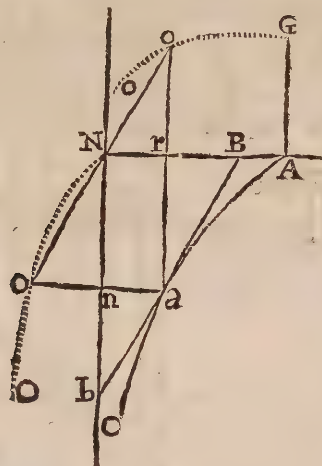
ma-

majorem ipſarum revolutis progenitas; idque diverſa rurſus à præcedentibus methodo: eſto, *fig.* 2., Logiſtica BNM, cujus ad puncta N, M tangentes NC, MG occurrant aſymptoto quidem FG in punctis C, G, ordinatæ verò BF in



punctis K, I, & coordinentur ND, NA, ME, MH; dico AK ad HI (ſubtangentes ſcilicet in ordinata, non in aſymptoto acceptas) eſſe ad invicẽ, ut ſunt rectangula AND, HME; ratio enim AK ad HI componitur ex AK ad AN [ſeu DN ad ſubtangentem DC, vel EG] AN ad MH, & MH ad AI (ideſt ſubtangentis EG ad EM) ergo & componitur ex DN ad EM, & AN ad MH; ex his autem conflatur ratio rectanguli AND ad HME; itaque conſtat propoſitum. Breviùs ſic: ob proportionales lineas GE, EM, MH, HI, eſt rectangulum ex GE, aſymptoti ſubtangente, in HI, ſubtangentem ordinatæ, æquale inſcripto rectangulo EMH; ſimiliter CD in AK æquabitur DNA; ergo, ut rectangula ſubtãgentium aſymptoti in ſubtangentes ordinatæ (hoc eſt ipſæ ſubtangentes in ordinata, cùm quæ in aſymptoto ſint æquales) ita erunt rectangula Logiſticæ inſcripta.

9 Concipiamus jam Logiſticam eſſe A a C, cujus ordinata A N, aſymptotos N b, tangens ad quodvis punctum a ipſa a B, conveniens cum ordinata in B; ac mota regula N o per punctum N, ita ut perpetuò parallela exiſtat tangenti,

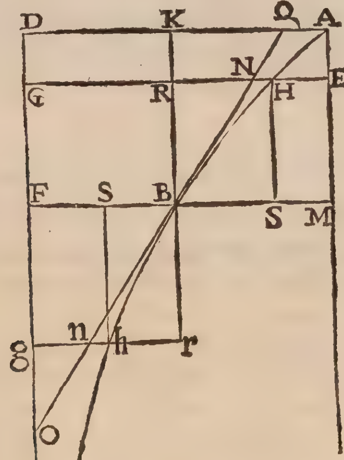


occurrat verò ordinatæ productæ a n ad puncta o O, perficiatur figura N o O ad communem axem N b poſita, quæ ex dictis *cap.* 8. *num.* 4. & 5. erit ipſi Logiſticæ Correlata, ejuſque ſpatia o N n reſpectivè ſemper æqualia ſpatiis a A r: ſingulæ autem lineæ o n æquales erunt ſubtangentibus r B, in ordinata acceptis; ſed hæ proportionantur rectangulis n a r, inſcriptis Logiſticæ ſpatio, vel etiam ſuperficiebus cylindricis per illorum converſionem circa N A deſcriptis; erunt igitur lineæ ordinatæ in figura O N n, ipſi o n parallelæ, ut concentricæ ſuperficies cylindricæ in ſolido rotundo ex n a A N, circa A N revoluto, productæ à ſingulis ordinatis n a per eadem puncta n tranſeuntibus; igitur omnes lineæ figuræ o n N ad totidem æquales extremæ o n [ſive ipſa figura o n N, aut trilineum a A r illi æquale ad rectangulum N n o, vel a r B] erunt, ut omnes cylindricæ ſuperficies in dicto ſolido, ex portione n a N revoluta genito, ad totidem æquales extremæ à li-

nea

nea n a generatæ (ideſt ut ipſummet ſolidum rotundum ad ſolidum, quod gineretur ab hyperbola per a aſymptotis n N A inſcripta, & circa N A revoluta, quippe in illo omnes cylindricæ ſuperficies concentricæ æquales forent ei, quæ ab n a deſcribitur, propter ſingula inſcripta parallelogramma ipſi n a r æqualia) & ſumendo conſequentium ſemiſſes, erit trilineum a r A ad inſcriptum triangulum a r B, ut ſolidum rotundum ex n a A N circa A N, ad inſcriptum cylindrum ex parallelogrammo n a r N revoluto productum.

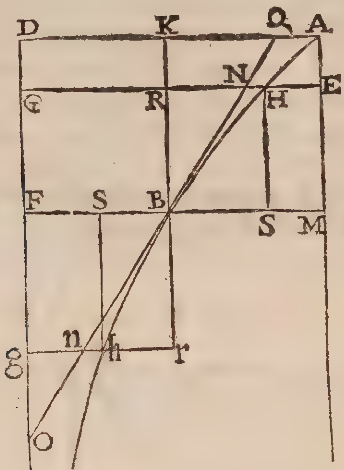
10 Nota autem eſt ratio trilinei ad inſcriptum triangulum, quippe aſſumpta figura *cap.* 7. *num.* 2. adhibita, conſtat, trilineum B K A æquari rectangulo ſubtangentis O F in Q A, triangulum verò B K Q æquatur rectangulo ex B K in



ſemiſſem K Q; propterea ratio trilinei ad triangulum componetur ex O F ad B K (vel D K ad K Q) & ex Q A ad ſemiſſem K Q (vel dupla Q A ad K Q ideſt erit, ut duplum rectangulum ex D K in Q A ad quadratum K Q; nota igitur ſimiliter erit ratio ſolidi rotundi ex ſpatio Logiſticæ duabus ordinatis intercepto, & circa majorem revoluto

ad

ad cylindrum inſcriptum, ab inſcripto ſcilicet parallelogrammo in eadem converſione progenitum, eadem ſemper, quæ præfati rectanguli ad dictum quadratum. Tubos verò, ſeu annulos ex ejuſmodi ſpatiis circa ordinatam à majori remo-



tiorem revolutis, putà ex GHBF circa AD rôtato, progenitos, eadem aſſumpta ſuperioris numeri figura, eodemque argumento facilè ad menſuram vocabis, ſimilia veſtigia premendo.

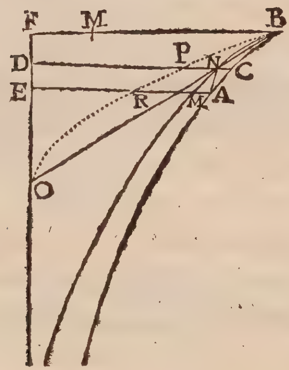
CA-

CAPUT XI.

Propoſitio, & demonſtratio Undecimi Theorematis circa diſtantiam centri gravitatis Logiſticæ ab ordinata. Solida infinitorum Logiſticæ ſpatiorum circa ordinatas ſunt, ut eædem ordinatæ. Centrum gravitatis quomodo diſtet ab alterutra ordinatarum in ſpatiis determinatis Logiſticæ. Solida ex his ſpatiis circa quamvis ordinatam revolutis. Datum ſolidum in data ratione dividere, &c. Propoſitio, ac prima demonſtratio Theorematis XII. circa diſtantiam centri gravitatis Logiſticæ ab axe. In Correlatis figuris diſtantia centri gravitatis interioris ſubdupla eſt ſimilis diſtantiæ exterioris. Talis diſtantia in figura Correlata quadrantis circuli eſt ſeſquitertia baſis quadraticis. Centrum gravitatis trilinei Cycloidis diſtat à verticis tangente per ſemiſſem radii. Diſtantia centri gravitatis ſemicycloidis, & ejus trilinei à baſi, & vertice; necnon ſolida ab iis deſcripta. Ciſſoidalis ſpatii centrum gravitatis, in qua ab aſymptoto diſtantia; ejus ſolida, atque hinc ratio fuſi cycloidalis ad cylindrum. Figuræ, quæ Logiſticæ ad axem correlata eſt, diſtantia centri gravitatis ab ordinata. Similis diſtantia in harum, & generaliter omnium Correlatarum figurarum complexo. Secunda demonſtratio Duodecimi Theorematis, & extenſio ad inventionem centri, in quibuſvis Logiſticæ portionibus, ad ſolida, ex iis circa quamvis lineam rotandis determinanda, utilem.

Jam

IAm ad centra gravitatis, tum ſpatii ſuperficialis Logiſticæ, tum ſolidorum ipſius determinanda procedit Hugenius; ait enim Theoremate Undecimo: *Ex hac ſolidorum menſura ſequitur, quòd centrum gravitatis infiniti ſpatii poſt unam ordinatarum diſtat ab hac ordinata longitudine ſubtangentis;* quod ſic breviter demonſtratur: rotunda ſolida rationem habent compoſitam ex rationibus figurarum genitricum, & diſtantiarum centri gravitatis earumdem ab axe motus, ex pervulgata jam regula Guldini, cui neſcio an præluſerit Pappus ad finem ſuæ præfationis in *lib.7, mathem. collect.* Solidum igitur ex Logiſtica B C A circa B F ad conum ex inſcripto triãgulo O B F

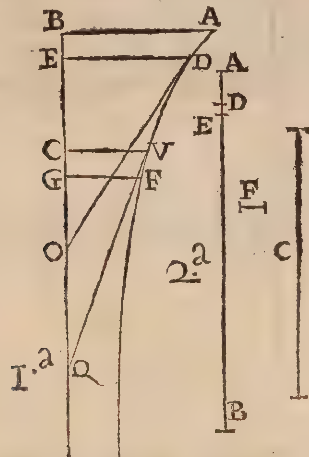


circa eamdem revoluto eſt in compoſita ratione ex ſpatio Logiſticæ F B C A ad triangulum O B F (quæ per Theorema 7. *cap.* 8. demonſtratum eſt ratio dupla) & ex diſtantia centri gravitatis ſpatii Logiſtici ab ipſa F B ad diſtantiam centri gravitatis trianguli, quæ, ut notum eſt, æquaretur trienti ipſius O F; ſed hæc eadem ſolida ex dictis *cap. præced.* ſunt ad invicem in ratione ſextupla, ideſt in compoſita ex dupla, & tripla; oportet ergo diſtantiam centri gravitatis ſpatii Logiſtici ab ipſa F B eſſe triplam diſtantiæ centri gravitatis trianguli

ab

ab eadem F B; ergo oportet talem diſtantiam eſſe ipſammet ſubtangentem O F, cujus triens diſtantiam centri gravitatis trianguli, ut diximus, determinat. Patet ergo propoſitum.

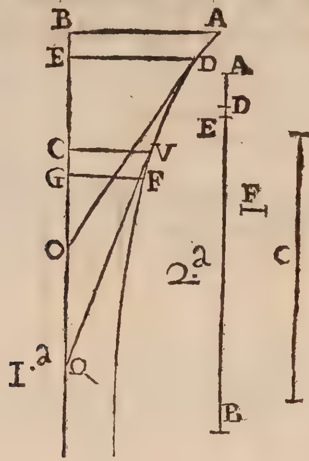
2 Hinc habetur, cujuſvis infiniti ſpatii Logiſticæ B A V Q, vel C V F Q, diſtantiam centri gravitatis ab extrema ordinata eamdem ſemper eſſe, quippe æqualem communi ſubtangenti: unde efficitur, ſolida ex primo ſpatio circa B A, & ex



ſecundo circa C V, eſſe ad invicem, ut ipſamet ſpatia, ex quibus gignuntur, ob æqualem utrinque centri gravitatis diſtantiam, ſeu eſſe ad invicem, ut ipſæ ordinatæ B A, C V talibus ſpatiis proportionales, ex dictis *cap.* 3. *num.* 7. id quod vel exinde patet, quòd talium ſolidorum ſubſexcupla, nempe coni ab inſcriptis triangulis A O B, C V Q, ob circulos æqualium radiorum B O, C Q ſunt, ut altitudines B A, C V, circa quas convertuntur.

3 Hinc etiam patet, determinato quovis ſpatio B A V C duabus ordinatis interjecto, aſſignari poſſe diſtantiam ejus centri gravitatis ab alterutra ordinatarum. Ducatur enim tangens A O, itaque in O eſt centrum æquilibrii totius ſpatii

tii B A V Q compoſiti ex propoſito B A V C, & ex reliquo C V F Q; ſed reliqui C V F Q habetur centrum gravitatis, ducta tangente Q V, in ordinata ex puncto Q, diſtans videlicet ab æquilibrii centro O per Q O æqualem altitudini



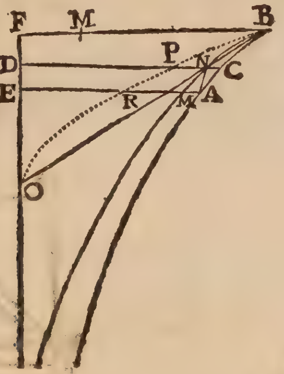
C B propoſiti ſpatii (ut patet, æqualibus ſubtangentibus C Q, B O, communem ſubtrahendo, vel addendo quantitatem C O) ſi igitur fiat, ut ſpatium B A V C ad reliquum C V F Q, nempe ex Theoremate Tertio, quod *cap.* 4 *num.* 5. & *cap.* 3. *nu.*8. demonſtravimus, ut differentia ordinatarum A B, C V ad ipſam C V, ita Q O, vel B C, ad O E, erit in E D centrum gravitatis propoſiti ſpatii C V A B, diſtans ab A B per E B, & à C V per E C; conſtat ergo propoſitum.

4 Dabuntur itaque ſolida ex quavis Logiſticæ portione A V C B, nedum converſa circa majorem ordinatarum B A, ſed & circa minorem C V, quippe ad invicem in ratione E B ad E C; & annuli ex variis ſpatiis E D V C, & C V F G, circa eamdem, vel diverſas ordinatas revolutis, notam dimenſionem, & proportionem habebunt, quippe in compoſita eorumdem ſpatiorum, diſtantiarumq; ab axe ſui motus ratione;

Qui-

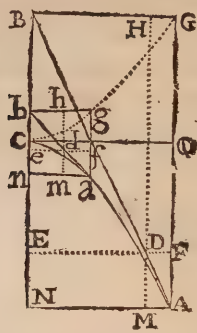
Quibus facilè erit, dato ſolido ex dato ſpatio circa axem datũ revoluto, aliud ex alio item ſpatio dato circa aliam quamdam ordinatam majorem, minoremve revolvendo producendum reperire, priori ſolido, vel æquale, vel in data ad ipſum ratione; item quodvis ex talibus ſolidis per concentricas ſuperficies in data ratione dividere, &c.

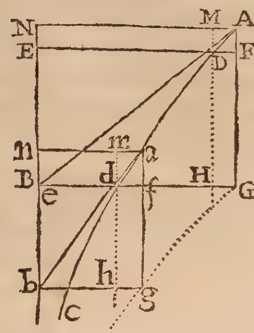
5 Jam ad Duodecimum Theorema Hugenii gradum faciamus, in quo aſſerit: *Idem centrum gravitatis diſtare ab aſymptoto per quadrantem ordinatæ*; Similiter enim ratio ſolidi ex B C A Logiſtica circa axem F O, ad conum ex triangulo O B F circa eumdem axem, cùm ſit ex Theoremate, & *cap*. 9. ratio

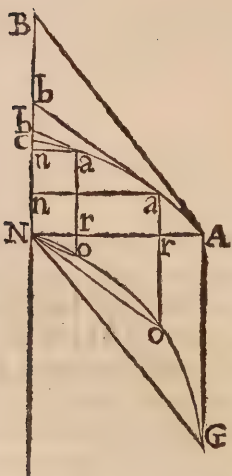


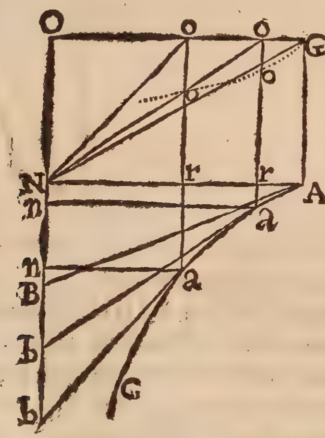
ſeſquialtera, componetur utique ex dupla, & ſubſeſquitertia, ut patet in numeris 6, 3, 4; componitur autem & ex ratione ſpatii F B C A ad triangulum F B O (quæ eſt ratio dupla) unà cum ratione diſtantiæ centri gravitatis ſpatii F B C A ad diſtantiam ſimilis centri trianguli F B O ab eodẽ axe motus F O; oportet igitur, quòd diſtantia centri gravitatis ſpatii Logiſticæ ab axe ſit ſubſeſquitertia diſtantiæ centri gravitatis trianguli, nempè ſubſeſquitertia trientis ipſius F B, adeòque quòd ſit æqualis quadranti ipſius F B, ut in hoc Theorem. proponitur, ſic enim erit ad diſtantiam centri gravitatis trianguli, ut $\frac{1}{4}$ ad $\frac{1}{3}$ ideſt prorſus, ut 3 ad 4. Q. e. d.

6 Eadem veritas, ut ſecundò demonſtretur, imò & ad diſtantiam centri gravitatis partium Logiſticæ extendatur, uberrimum illum fontem Correlatarum figurarum, unde bis jam hauſimus, in *cap.* ſcilicet 8. & 9. tertiò iterum repetam, neque enim venam idcircò exhauriendam putes, Mi Lector.





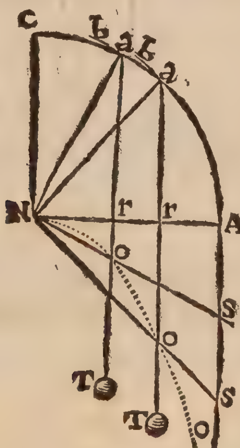




Audi igitur. In Correlatis quibuſcumq; figuris C A N, & g G A a C, aut C A N, G o o N, diſtantia gravitatis centri primæ figuræ interioris C A N ab axe N B, ſemper ſubdupla eſt diſtantiæ ſimilis centri alterius figuræ g G A a C, vel

A G o o N ab eodem axe; cùm enim æquales ſint hæ figuræ, utì *cap.* 8. demonſtratum eſt, ſolidum tamen, quod ex prima ſit ex *cap.* 9. ſubduplum ſolidi ex ſecunda circa axem N B revoluta, patet, hæc ſolida eſſe ad invicem, ut ſunt diſtantiæ centrorum gravitatis ab axe motus, adeòq; diſtantiam primæ eſſe ſubduplam diſtantiæ alterius; & data diſtantia centri gravitatis alterutrius ex Correlatis figuris, diſtantia reliquæ non ignorabitur.

7 Colliges jam, diſtantiam centri gravitatis figuræ A N o o, quadranti circulari Correlatæ, ab axe C N, eſſe ſeſquitertiam



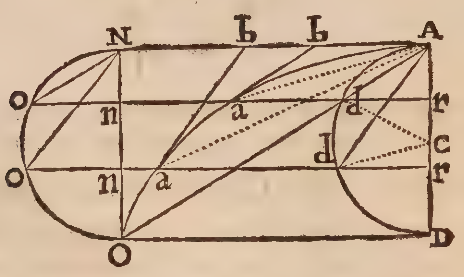
baſis Quadratricis, eidem quadranti per C adſcriptæ; cùm enim debeat dupla eſſe diſtantiæ centri gravitatis quadrantis C A N, quæ æquatur $\frac{2}{3}$ baſeos dictæ Quadratricis, eò quòd ratio cõpoſita ex diſtantia centri gravitatis quadrantis ad ſemiſſem radii (diſtantiam centri gravitatis quadrantis circumſcripti) & ex ſemiſſe radii ad baſim Quadratricis, ſive ex ſemiſſe arcus C A ad radium, aut ipſius quadrantis C A N ad radii quadratum, debet eſſe ratio ſeſquialtera, eadem nempè, quæ hæmiſpherii ex quadrante ad cylindrum ex radii quadrato (juxta Archimedis doctrinas breviùs à nobis demonſtratas in Vivianeis ad

Prop.



Prop. 37. *Coroll.* 6.) quæ, ex Centro-barica, præſcriptis rationibus componitur. Nota proinde fiet diſtantia centri gravitatis ejuſdem figuræ A N o o ab A S, & notum ſolidum ex ipſa circa A S deſcriptum, utì & ex eadem circa C N.

8 In trilineo Cycloidis A a O N patebit, centrum gravitatis diſtare à tangente verticis A N per ſemiſſem radii, figura



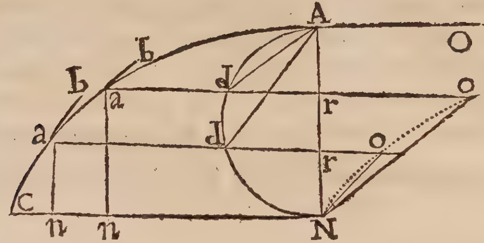
quippe huic Correlata eſt, ex *cap.* 8. *num.* 7. ſemicirculus N o o, cujus centri gravitatis diſtantia eſt utique radius integer: conſequenter diſtabit idem gravitatis centrum in trilineo Cycloidis ab ejus baſi O D per $\frac{3}{4}$ diametri O N; & ſolidum ex tali

tri-

trilineo circa O D, triplum erit ſolidi ex ejuſdem converſione circa N A, vel æquale erit ſolido ex aggregato ſemicirculi, & præfati trilinei, videlicet ſpatii A N o O a A (aut A N O + A d D) circa N A; cùmque cylindrus ex parallelogrammo O N A D, ſive circa O D, ſive circa N A, pariter idem ſit; reſiduum, nempe factum ex D A a O ſemicycloide circa O D, æquabitur facto ex trilineo O a A d d D circa N A, atque, ut ipſa ſemicyclois ad dictum trilineum, ita reciprocè erit diſtantia centri gravitatis ejuſdem trilinei ab N A, ad diſtantiam centri gravitatis ſemicycloidis à baſi O D, videlicet in ratione ſeſquialtera, illa autem æquatur $\frac{5}{8}$ diametri A D (ut mox oſtendam) ergo hæc æquatur $\frac{5}{12}$ ejuſdem ſuæ diametri.

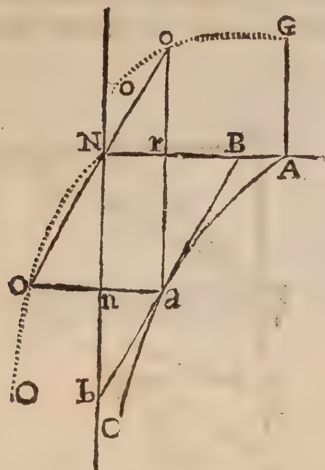
9 Quod nuper aſſumpſi ſic oſtendetur: notum eſt, duas ſimul lineas in trilineo Cycloidali O a A d D à centro æquè remotas, a d, a d, æquales eſſe baſi O D, ſeu interceptæ o d inter peripherias ſemicirculorum A a D, N o O; ipſa igitur o a, accepta in trilineo A a O o N versùs baſim, æqualis ſemper erit lineæ a d, ſumptæ versùs verticem A in altero trilineo A a O D d A; itaque ipſum trilineum A a O o N haberi poterit pro eodem O a A d D inversè poſito, & tanta erit centri gravitatis diſtantia in hoc ab ipſa A N, quanta in illo ſimilis centri diſtantia ab O D Jam ſic: ſolidum ex ſolo A a O n N circa O D triplum eſt (ex ſupra oſtenſis) ſolidi ex eodem ſpatio circa N A; & annulus ex ſemicirculo N O o circa O D (nam perinde eſt, ac circa A N) eſt ejuſdem duplus; itaque ſolidum ex utriuſque complexo A a O o N circa O D quintuplus eſt ſolius ſolidi ex O a A N n circa N A, additoque & hinc annulo ex ſemicirculo eodem circa N A, cujus quantitas ejuſdem ſolidi eſt dupla, habebitur, quòd ſolidum ex integro ſpatio A a O o N circa O D, ad ſolidum ex eodem circa N A eſt, ut 5 ad 3, diſtantia igitur centri gravitatis talis ſpatii ab O D, ad diſtantiam ejuſdem ab A N eſt, ut 5 ad 3; ideòque prima diſtantia æquatur 5 octantibus diametri N O, vel A D, indeq, (ex præmiſſis) diſtantia centri gravitatis trilinei O a A d D ab A N eadem erit, quam ſupra determinavimus.

10 Cùm igitur & ſpatium Ciſſoidale, juxta dicta *cap.* 8. *num.* 9. figura ſit Cycloidi Correlata, erit diſtantia centri gravitatis ſpatii Ciſſoidalis A N o o infinitè longi, à C N, dupla diſtantiæ ſimilis centri cycloidis A a C N ab eadem baſi



C N; cùmque hæc æqualis ſit $\frac{5}{12}$ diametri, juxta dicta *num.*8. illa æqualis erit $\frac{10}{12}$, ſeu $\frac{5}{6}$ ejuſdem diametri, ac conſequenter diſtabit idem gravitatis centrum ab aſymptoto A O per ſextantem diametri N A; eritque ſolidum ex Ciſſoide A N o o circa A O revoluta, æquale quintæ parti ſolidi ex eodem ſpacio circa C N converſo, aut $\frac{2}{5}$ ſolidi ex Cycloide A C N circa baſim C N (quippe hoc ſolidi ex Ciſſoide circa eumdem axem ſubduplum eſt, utì jam oſtendimus *cap.* 9. *nu.* 12:) eſt verò, ut ibidem monuimus, ſolidum ex Ciſſoide circa A O, æquale annulo ſtricto ex ſemicirculo genitore, ſolidum igitur ex ſemicirculo genitore Cycloidis circa tangentem verticis, vel baſim cycloidis revoluto, æquatur $\frac{2}{5}$ fuſi Cycloidalis ex cycloide circa baſim rotata, qui propterea fuſus æquabitur 5. octantibus circumſcripti cylindri ex parallelogrammo D O N A ſemicirculi quadruplo, indeque producente cylindrum quadruplum dicti annuli.

11 De infinitarum parabolarum, atque hyperbolarum, deque Tractoriæ centro non eſt quod addam, Tute ipſe exerce, mi Lector; ego obiter adnoto, in figura N o O ad eumdem axem N b Logiſticæ Correlata, ejus gravitatis centrum

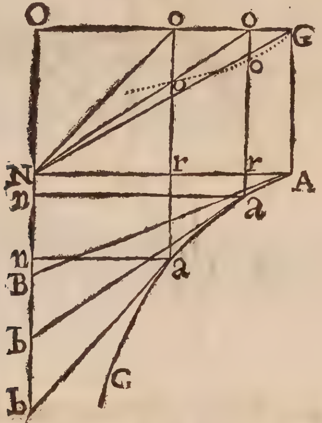


ab N A diſtare per duplum ſubtangentis Logiſticæ, quandoquidem centrum Logiſtici, ſpatii, ex ſuperiori Undecimo Theoremate, diſtat ab ordinata A N per ſimplicem longitudinem ſubtangentis; complexi verò ex figuris Correlatis, ſcilicet ſpatii C a A N o O centrum gravitatis diſtat ab A N per ſeſquialteram longitudinem ſubtangentis; imò generaliter ſemper in figuris Correlatis, quarum partium diſtantia interioris, (ſcilicet ad quam pertinet tangens a B) eſt 2, earum diſtantia complexi ex utroque ſpatio eſt 3, diſtantia verò exterioris (ſcilicet ad quam ordinantur ipſæ o n æquales ſubtangentibus alterius) eſt 4; utì eſt evidens ex dimenſione ſolidorum ab ijs factorum: unde expeditiùs demonſtrabis quæ *num.* 9. dicta ſunt.

Data autem opera, tum hìc, tum *cap. præceden.* omiſimus demonſtrationem centri gravitatis in figuris ad modum Spi-

ralium deſcriptis, ut in ijs exercere ſe poſſet Lectorum induſtria, comparando videlicet triangula illa, ex quibus conſtant, cum parallelogrammis figurarum Correlatarum, ut ſupra fecimus *cap.* 8. *num.* 12.

12 In Logiſtica igitur A a a C, cujus Correlata figura ad ordinatam N A eſt parallelogrammum A G O N, ut oſtendimus *d. cap.* 8. *num.* 13. cùm diſtantia centri gravitatis ipſius



O G A N dupla eſſe debeat diſtantiæ ſimilis centri Logiſticæ N A a C ab eodem axe N B; ſit autem diſtantia illa in parallelogrammo æqualis ſemiſſi ipſius N A, patet, diſtantiam ejuſmodi in ſpatio Logiſtico fore $\frac{1}{4}$ ejuſdem N A, utì in hoc Duodecimo Theoremate ab Hugenio propoſitum fuit; ſed & conſtat methodus comparandi diſtantias centri gravitatis variarum inſuper Logiſticæ partium ab eodem axe; accepto quippe ſpatio quolibet n a a n, ordinatiſque a r o, a r o, patet, rectangulum o r r o eſſe figuram Correlatam ipſi a n n a; datur autem diſtantia centri gravitatis parallelogrammi ejuſdem ab N O, ſcilicet media arithmetica inter r N, r N diſtan-

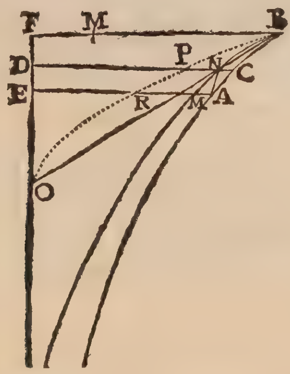
ſtantias laterum ab NO, itaque & ejus ſubdupla dabitur, ſcilicet diſtantia centri gravitatis figuræ naan ab eodem axe, perpetuò æqualis ſemiſſi mediæ arithmeticæ inter extremas ordinatas. Id quod ſuo modo obſervatur & in toto Logiſticæ ſpatio, extremæ ſiquidem ordinatarum ſunt AN, & punctum; media inter hæc arithmetica ſemiſſis NA; hujus dimidio, nempe $\frac{1}{4}$ NA æqualis prorſus eſt diſtantia centri gravitatis integri ſpatii Logiſticæ. Dabitur ergo in quovis hujuſmodi ſpatio, ſive integro, ſive duabus ordinatis intercepto, punctum ipſum, quod gravitatis ejus centrum determinat, adeòq; jam metiri licebit ſolida à Logiſticæ ſpatiis circa quamlibet lineam revolutis, ex dimenſione tum ipſius Logiſticæ, tum diſtantiæ ejus centri gravitatis à propoſita linea.

CAPUT XII.

Theorema Decimumtertium demonſtratur. Eadem ſemper centri gravitatis in quibuſvis infinitè longis Logiſticæ ſolidis diſtantia; quomodo in ejuſdem ſolidi portionibus indaganda. Prima demonſtratio Decimiquarti Theorematis; ad majorem rigorem quomodo exigenda. Solidorum ab eadem figura circa baſim, & axim rotata diſtantiæ centri gravitatis ſunt, ut diſtantiæ ab axi, & baſi genitricis figuræ. Altera ejuſdem Theorematis demonſtratio. Variarum Conoideon centra hinc determinanda; in portionibus ſolidi rotundi, aut cylindricis Logiſticæ truncis, aut figura Logiſticæ Correlata, centra gravitatis dantur. Libræ infinitæ, geometricè decreſcentibus, & æquè diſtantibus ponderibus gravatæ, aut finitæ quidem, ſed per intervalla continuè proportionalia arithmeticè in infinitum creſcentibus quantitatibus oneratæ, centra æquilibrii determinari poſſunt. Secunda demonſtratio à ſcrupulo vindicata. Cautio in his adhibenda; aliorum lapſus notati, ut devitentur. Curvis ſuperficiebus ſolidorum generalis demonſtratio applicatur. Logiſtica curva centro gravitatis caret; circa axem rotata ſuperficiem infinitè longam, finitæ dimenſionis producit: in qua ad determinatam hyperbolam ratione; hæc hyperbola, cujus parabolicæ lineæ in ſemitranſverſum ductæ rectangulo æqualis; curva illa ſuperficies, cujus circumferentiæ, & peripheriæ

riæ parabolicæ rectangulo æqualis ; ut ejus portiones correſpondeant ejuſdem parabolæ partibus. Tractoriæ ſolidum finita ſuperficie gaudet , ejus curva centro pariter caret .

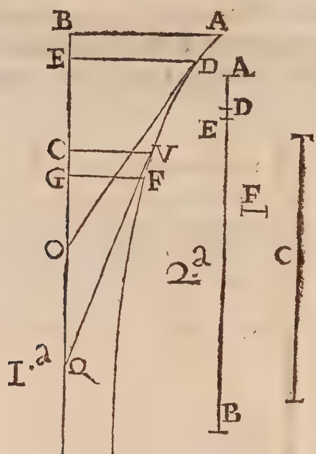
1 POſt centra gravitatis ſpatiorum Logiſticæ, progreditur Hugenius ad gravitatis centra in ejus ſolidis determinanda : *Repèrimus* , inquit Theorem. XII. *quòd centrum gravitatis primi ex dictis ſolidis infinitis diſtat à ſua baſi per ſemiſſem ſubtangentis*. Primum quippe illud ſolidum ex Logiſtica F B C A circa axem F O revoluta, reſolutum in circulos baſi parallelos , proportionaliter analogum eſt alteri



Logiſticæ B N M, ordinatarum in duplicata priorum ratione decreſcentium , qualem ſupra deſcripſimus *cap* 9. *nu*.4 eadem igitur erit diſtantia centri gravitatis præfati ſolidi à circulo ſuæ baſis , quæ diſtantia centri gravitatis Logiſticæ B N M à ſua extrema ordinata F B; ſed hæc diſtantia æquatur ſubtangenti ejuſdem Logiſticæ B N M, per Undecimum Theorema Hugenii ſuperiori capite demonſtratum , & hæc eadem ſubtangens oſtenſa eſt *cap*. 9. *num*. 5. æqualis ſemiſſi ſubtangentis F O, pertinentis ad priorem Logiſticam B C A ; itaque & il-

illius ſolidi rotundi centrum gravitatis diſtabit ab extremo circulo ſuæ baſis per ſemiſſem ſubtangentis, ſeu Parametri. Quod erat demonſtrandum.

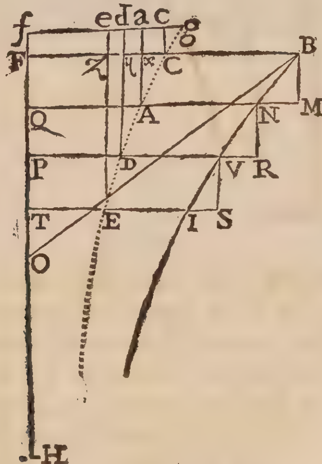
2 Eadem itaque ſemper erit diſtantia centri gravitatis à ſua baſi infinitorum quorumvis ſolidorum ab eadem Logiſtica per varias ordinatas reſecta factorum, ſemper ſcilicet æqualis dimidiæ ſubtangenti ejuſdem Logiſticæ; Quocirca portionum etiam cujuſvis ex dictis ſolidis centra gravitatis aſſignari poterunt: proponatur enim verbigratia quod ſit ex



portione B A V C circa B C revoluta; ita procedemus, ſimili methodo, ac ſuperiori capite *num.* 3. eſto B O ſemiſſis ſubtangentis, & conſequenter O centrum gravitatis totius facti ab infinito ſpatio B A V Q. Similiter & C Q ſemiſſis ſubtangentis ejuſdem, ut punctum Q ſit centrum gravitatis ſolidi, quod ex C V F Q; diſtat igitur hoc centrum à puncto O, per Q O æqualem altitudini ſolidi propoſiti B C, propter communem additam, vel detractam C O; fiat igitur, ut ſolidum ex A B C V ad infinitum ex C V F Q, nempe, ut colligitur ex dictis *cap.* 9. *num.* 3. & 10. ut differentia qua-

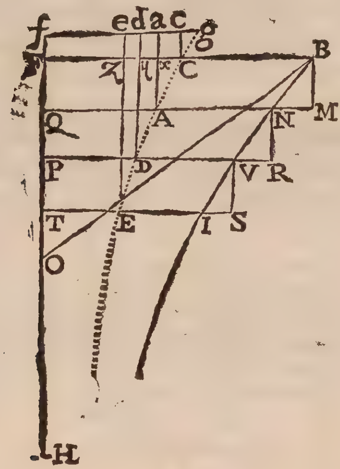
dratorum A B, & C V ad quadratum C V, ita Q O, vel B C ad aliã C E, erit E centrum gravitatis ſolidi ex ſpatio B A V C circa B C revoluto geniti; quamquàm expeditiùs forte idem obtinere licebit per inventionem diſtantiæ centri gravitatis ab ordinatis in congruo ſpatio Logiſticæ, in duplicata ordinatarum ratione decreſcentis, proportionaliter analogo ad dictũ rotundum ſolidum, utì numero præcedenti indicavimus.

3 Difficilior mihi viſa fuit, reque ipſa nonniſi ægrè ſucceſſit (cur enim fateri erubeſcam, qui & in magis obviis moram pati aliquando ſoleo?) Theorematis Decimiquarti demonſtratio, ubi Vir Clariſſimus pronunciat, quòd *centrum etiam gravitatis alterius ſolidi diſtat ab ejus infinita baſi per octantem ſui axis*. Hoc ut demonſtrem, figuram reſumo, eumdemque calculandi modum, quo *cap.* 10. *num.* 6. uſus ſum:



ex parallelogrammis itaque F M, Q R, P S Logiſticæ circumſcriptis, intelligatur confici in converſione omnium circa F B, ſeries ſolidorum, quæ pro minori, ac minori latitudine ſingulorum, magis, magiſque accedet ad rotundum Logiſticæ ſolidum, de quo in hoc Theoremate ſermo eſt; itaque ubi F Q infinitè parva ſupponatur, tunc cylindrus ab F M de-

deſcriptus, & tubi cylindrici ex reliquis QR, PS, &c. prorſus coincident cum tali Logiſticæ ſolido, quodque de iis demonſtrabimus, de hoc perinde obtinebit; porrò oſtendimus loco citato (retentis iiſdem ſymbolis) cylindrum FM eſſe *ddb*, & tubos huic conſequentes per ordinẽ eſſe $3\frac{ddb}{a}$, $5\frac{ddb}{aa}$, &c.

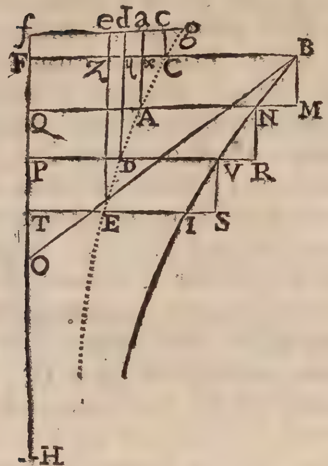


ut ſupra ad finem *pag.* 129. ſeu (propter infinitè exiguum exceſſum ipſius *a*, ſeu FO ſupra aſſumptam unitatem QO, qui exceſſus penitus evaneſcit, ubi ſolidorum ſeries in ipſum Logiſticæ ſolidum deficit) accepta loco ipſius *a*, unitate, quæ ad quemlibet gradum elevata non creſcit, nec terminos dividens illos immutat, erit prædicta ſolidorum ſeries æqualis *ddb* + 3 *ddb* + 5 *ddb* + 7 *ddb*, &c. ſuſpenditur autem in libra FB primus terminus ad punctum C, medium ipſius FB, & ſecundus terminus ad punctum x, ubi cadit axi parallela, ducta ex medio puncto A lineæ QN; & tertius terminus ad y punctum, quod determinat parallela yD bifariam ſecans ipſam PV; ſimiliter & quartus terminus pendet ex z per lineam zE biſecantem ipſam TI; ſunt enim puncta C, x, y, z, &c. centra gravitatis per ordinem talium ſolidorum;

per

per puncta verò C, A, D, E, & alia ſimiliter bifariam ſecantia ſingulas Logiſticæ ordinatas, tranſit utique linea pariter Logiſtica E D A C g. Producta igitur O F in f, ut F f æquetur ſemiſſi ipſius F Q (adeòque à fortiori ſit infinitè parva quantitas, ac penitus evaneſcens) ad parallelam ordinatam f g producantur axi æquidiſtantes E z, D y, A x, in e, d, a, c; poterit ſimiliter f g ſumi pro libra, ex qua pendeat primum ſolidum per lineam C c, ſecundum per lineam A a, tertium per D d, quartum per E e, &c. & quidem quarum partium F f, ſeu C c ponitur 1. talium A a eſt 3. D d 5. E e 7. &c., juxta progreſſionem arithmeticam numerorum imparium, ſecundùm quam ipſa ſolida ex iis pendentia procedunt; perinde igitur onerabitur linea f g, vel F C à talibus ſolidis ex ea pendentibus, ac oneretur f g à lineis Logiſticæ g C A D E; ſed ab his ordinata f g ſic oneratur, ut centrum æquilibrii habeat diſtans ab axe F O per quadrantem ipſius f g, vel F C illi proximè æqualis (talis quippe ex Theoremate Duodecimo eſt diſtantia centri gravitatis Logiſtici ſpatii, quod tales lineæ implent) ergo & centrum æquilibrii, aut gravitatis omnium illorum ſolidorum, ſeu integri ſolidi ex Logiſtica circa ordinatam revoluta, diſtat ſimiliter ab axe per quadrantem ipſius F C, ſeu octantem integræ F B ordinatæ; quod eſt propoſitum.

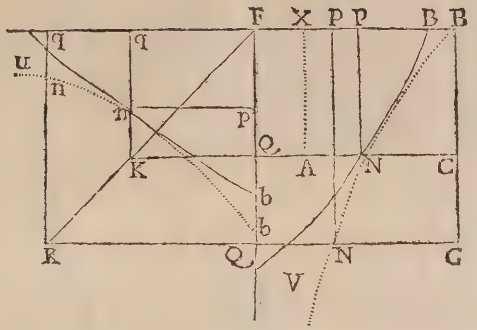
4 Si quis autem majorem in præſenti demonſtratione rigorem deſideraverit, is poterit apagogico circuitu ſibi penitus ſatisfacere, ſumptis, loco linearum C c, A a, D d, E e, parallelogrammulis C c g, A a c, D d a, E e d, &c. quæ penitus proportionalia deprehendet dictis ſolidis, ſiquidem eorum altitudines B F, Q N, P V, &c. proportionantur earumdem ſemiſſibus, & talium ſemiſſium differentiis g C, C a, a d, d e, &c. baſes verò talium ſolidorum ſunt, ut differentiæ quadratorum ex lineis F Q, F P, F T, &c. arithmeticè creſcentium, ſcilicet ut impares numeri, vel ut lineæ C c, A a, D d, E e, &c. Unde cùm accepta fuerint tot ſolida, quæ integrum Logiſticæ ſolidum impleant, & totidem parallelogramma, quæ Logiſticum illud ſpatium adæquent, conſtabit, in eodem puncto, tum Logiſtici illius ſpatii centrum



æquilibrij, tum ſolidi illius centrum gravitatis reperiri, adeòque ad quartam ipſius F C, vel octavam totius F B partem ab axe acceptam. Quod, &c.

5 Sed abſit, ut hìc ego ſubſiſtam; tamdiu mihimet ungues corrodam, quò uſque clariorem, (& verò generaliſſimam) rei hujus demonſtrationem detur extundere; mihi certè videtur univerſalius quidpiam hinc relucere, quam ut peculiaribus Logiſticæ proprietatibus adſtringi mereatur. Jam jam aſſequor: an non hoc illud eſt, quòd in qualibet figura F B V, cujus baſis F B, axis F Q, *fig ſeq.* quam rationem habet diſtantia centri gravitatis figuræ planæ ab axe, ad ſimilem diſtantiã à baſi, eamdem & proportionem habent ad invicem diſtantiæ centri gravitatis (uniuſcujuſque à ſua baſi) ſolidorum ex eadem circa baſim, & circa axim revoluta progenitorum? Intelligatur enim tota figura circa punctum F in ſuo plano verticali converti, quouſque axis F Q horizontaliter, ſituetur in F q, in directum poſitus priori baſi F B, quæ jam perpendiculariter pendeat in F b; ſumptaque axis portione F Q æquali ipſi F q, ordinentur Q N, q n, quæ erunt æquales; imò eædem; & in ſolido quidem ex figura circa F B revolu-

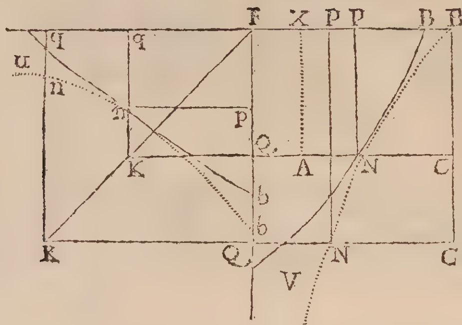
luta, cogitetur per punctum Q tranſire cylindrica ſuperficies à linea QN deſcripta in ſui rotatione circa FB, cujus quidem rectangulum per axem duplum erit, ut conſtat, inſcripti rectanguli FQNP; in ſolido autem ex eadem Figura



circa axem Fq revoluta, concipiamus per punctum q tranſire circulum radio qn deſcriptum, & biſecta in A ipſa QN, ducatur AX ipſi FQ parallela; pendebit igitur in priori ſolido cylindrica ſuperficies à linea QN deſcripta ex puncto X, quod eſt ejus centrum gravitatis; circulus verò radii qn pendebit ex ſuo centro q; eſt autem diſtantia qF ad FX, ut ipſa cylindrica ſuperficies ex QN ad circulum ex qn (eſt enim cylindrica ſuperficies quælibet ad datum circulũ, ut rectangulum per axem illius, ad quadratum ex radio hujus, per propoſitionem quintam Torricellii de ſolid. ſpher. l. 1. ideſt in propoſito, ut duplum rectangulum PNQ ad quadratum nq, ſive ut dupla PN, vel FQ ad ipſam QN, vel ut ſimplex qF ad FX ipſius QN dimidiam) æquiponderant igitur ex F, tum ille circulus, tum hæc ſuperficies; & hoc ſemper; quare & utriuſque ſolidi ad libram continuatam BFq appenſi æquilibrium habebitur ex puncto F; unde diſtantia centri gravitatis ſolidi ex Fbnu circa Fq à ſua baſi tranſeunte per punctum F, erit ad diſtantiam centri gravitatis ſolidi ex figura eadem FBNV circa FB revoluta à ſua baſi per F tranſeunte, ut reciprocè hoc ſecundum ſoli-

 dum

dum eſt ad illud primum; ſed quia utrumque gignitur ab eadem figura, nunc circa baſim F B, nunc circa axem F q, vel F Q revoluta, hæc ſolida ſunt ad invicem, ut diſtantiæ centri gravitatis figuræ genitricis à lineis, circa quas fit rotatio,



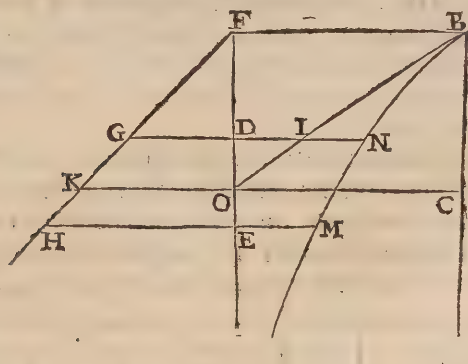
nempè ut diſtantia, quam habet centrum gravitatis planæ figuræ F B V à baſi F B, ad diſtantiam ejuſdem ab axe Q F; diſtantiæ igitur centri gravitatis ſolidorum ab eadem figura deſcriptorum, nunc facta circa axem, nunc circa baſim rotatione, ſunt ad invicem, ut diſtantiæ centri gravitatis figuræ genitricis à baſe ad ejuſdem diſtantiam ab axe. Quod eſt propoſitum.

6 Cùm igitur diſtantia centri gravitatis ſpatii Logiſtici à ſua baſi, ad diſtantiam ejuſdem ab axe ſit, per Theoremata Undecimum, & Duodecimum ſupra demonſtrata in capite præcedenti, ut ſubtangens Logiſticæ ad quadrantem ordinatæ, ſeu baſis, vel ſumendo terminorum ſemiſſes, ut dimidium ſubtangentis ad baſis octantem, etiam diſtantiæ centrorum gravitatis à ſua baſi in ſolidis à Logiſtica circa axem, & circa ordinatam revolutis, in eadem proportione erunt; quare cùm, ex Decimotertio Theoremate, centrum gravitatis diſtet à baſi ſolidi ex Logiſtica circa axem per dimidium ſubtangentis, etiam centrum gravitatis ſolidi ex Logiſtica circa ordinatam, diſtabit à ſua baſi per octantem ordinatæ, ut in hoc Theoremate XIV. proponitur. Q. e. d.

7 In-

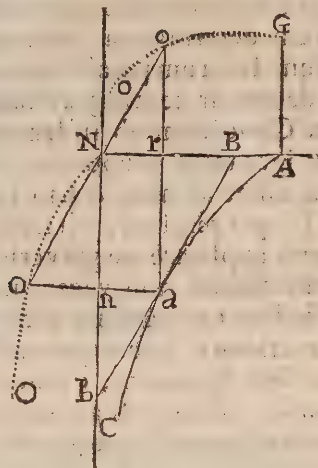
7 Intereà hinc habes, datâ ratione diſtantiarum centri gravitatis cujuſvis figuræ, tum ab axe, tum à baſi (ſive ab aliis duabus quibuſcumque lineis) dari & rationem diſtantiarum centri gravitatis à baſi in ſolidis circa eaſdem lineas revolutis, atque una iſtarum determinata, alteram non poſſe ignorari; quocirca omnium fuſorum parabolicorum ex parabolis circa baſes revolutis dabuntur centra gravitatis, quippe dantur & centra omnium Conoidum ab iiſdem circa axes rotatis productorum, nec ignoratur proportio, ſecundùm quam gravitatis centrum diſtat ab axe, & baſi infinitarum quarumvis parabolarum; Tu per teipſum, Mi Lector, doctrinam hanc his, aliiſq; figuris applicare ne graveris, mihi ad finem properanti immorari diutiùs non vacat, innuiſſe ſuffecerit.

8 Neque difficilius erit partium utriuſque ex dictis ſolidis centra eadem arte rimari, quum præmiſſum ratiocinium non minùs in portionibus figurarum, quàm in ipſis integris figuris locum habere poſſit, adeòque & ad partes ſolidorum ab iis deſcriptorum transferri queat; quæque de his rotundis ſolidis



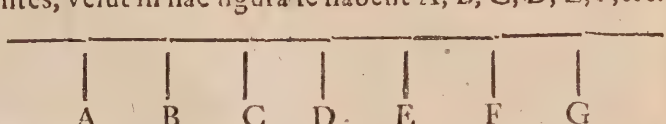
determinantur, in truncis pariter cylindricis, ſeu factis ex ductu ſpatii Logiſticæ F B N M in triangula F D G, F E H (quippe quæ illis rotundis proportionaliter analoga exiſtunt) pe-

perinde obtinere manifeſtum eſt; ſed & hinc ſpontè profluit diſtantia centri gravitatis ab axe N b in figura N o O Logiſticæ



ad axem Correlata, quippe analoga pariter eſt ſolido ex Logiſtica circa ordinatam, cùm oſtenſum ſit *cap.* 10. *num.* 9. lineas O n correſpondere rectangulis N n a Logiſticæ inſcriptis, ſive cylindricis ſuperficiebus per idem punctum n in præfato ſolido tranſeuntibus.

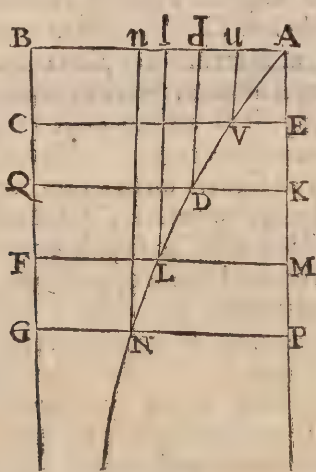
9 Animadvertēdum etiam, ex his quatuor poſtremis Theorematibus facillimè deduci, quodnam ſit æquilibrii centrum in libra longitudine infinita, in qua paribus intervallis diſſitæ magnitudines appenderentur in eadem ratione geometrica decreſcentes, velut in hac figura ſe habent A, B, C, D, E, F, &c.



1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, &c.

in infinitum, & quomodò, ſi illæ magnitudines jam decreſcerent

rent in duplicata priorum ratione, centrum æquilibrii duplò propiùs accederet termino libræ, unde omnium maxima penderet; Hæc enim ex Undecimo, & Decimotertio Theorematibus conſtare poſſunt, ſi Logiſticæ axem veluti infinitam libram orizontaliter diſpoſitam accipiamus, unde Logiſticæ ſpatia proportionaliter deficientia, æqualium tamen latitudinum, pendeant, idemque fiat in axe ſolidi ex Logiſtica circa axem rotata geniti, ſumptis æquè craſſis ejuſdem ſolidi portionibus, &c. Habetur item, diſpoſitis in libra finita magnitudinibus arithmeticè in infinitum creſcentibus, quales repræſentant lineæ V u, D d, L l, N n, &c. axi BG, Logi-



ſticæ A V D L N parallelæ, & ad ordinatæ partes proportionales A u, u d, d l, l n, &c. applicatæ, ſed intervallis geometricè decreſcẽtibus inter ſingulas relictis, itaut geometricæ progreſſionis terminus libræ extremo reſpondeat, unde infinita magnitudo ſuſpenditur, aſſignari poſſe centrum æquilibrii omniũ ipſarum magnitudinum; & quòd ſi jam dictæ magnitudines ex iiſdem punctis ſuſpenſæ creſcerent in duplicata priorum ratione, ſeu procederent, ut numerorum arithmeticè creſcentium quadrata (ut ſe habent circuli in ſolido ex Logiſtica circa or-

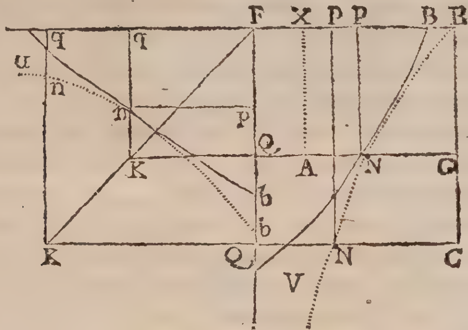
di-

dinatam rotata) centrum æquilibrii duplò propius fieret maximæ, & infinitæ magnitudini, ultimum libræ extremum occupanti; id enim ex Duodecimo, & Decimoquarto Theoremate abundè innoteſcit, & ſua veluti ſponte profluit; Hæc porrò ex iis Problematibus, aut Theorematibus ſunt, quæ, ſi nudè, & extra hanc materiam proponerentur, mirabilia omnibus, nonnullis quoque determinatu impoſſibilia videri poſſent.

10 Porrò, cùm Viro illuſtri demonſtrationem *num. 5.* allatam communicaſſem, ſcrupulum injecit, an ſatis tuta eſſet, ab æquiponderantia ſingularum ſuperficierum cylindricarum unius ſolidi, cum ſingulis circulis alterius, ad ipſorummet ſolidorum æquilibrium facta deductio: monebat quippe hinc conſequens fore, ut ipſarummet planarum figurarum illo modo appenſarum æquilibrium fieret ex eodem puncto F, ex quo ſemper, *vide fig. ſeq.* P N ad n q eſſet reciprocè (ob æqualitatem homologarum linearum) ut diſtantia q F ad diſtantiam F P; unde ſolida ex figuris circa axem, æqualia forent ſolidis ex iiſdem circa baſim revolutis, quod eſt abſurdum: repoſui tamen, vetuſtam illam eſſe, ac ſæpiùs convulſam exceptionem Cavallerianæ methodo dudum oppoſitam; ſive prorſus indiviſibilia non admitteret, eo modo, quo ſub geometricam conſiderationem cadunt, ſive ſaltem reſpueret in Staticæ negotio, pro illis reponeret ſolida quàm minimùm craſſa, ut hinc tubos cylindricos, illinc cylindrulos æqualis craſſitiei, ſive inſcriptos, ſive circumſcriptos præfatis ſolidis, atque ab iis differentes minori differentia qualibet data, & tum demonſtrationem, (utut minori compendio) pari evidentia ſucceſſuram; enimverò ad libram hinc inde appoſitis æquiponderantibus quantitatibus, atque his, aliis rurſus æquiponderantibus additis, modò totidem hinc, totidem inde ſuſpendantur, & utrumque aggregatum æquiponderare. In allato figurarum planarum exemplo conditionem non ſervari, quippe lineæ P N axi parallelæ non totidem ſunt, quot lineæ q n parallelæ baſi, ſiquidem illæ ad baſim, hæ ad axem, quibus reſpectivè applicantur, ſunt computandæ, atque eò plures ex alterutra parte ſunt, quàm ex altera, quantò major eſt linea, ad

quam

quam ordinantur, & quantò majori invicem intervallo diſtant; ideò cautum fuiſſe in demonſtratione (quemadmodum & facit Torricellius de dimenſ. parab. propoſ. 20. cujus hæc noſtra imitatio eſt) ut linea F q æqualis ſumeretur ipſi Q F, ut circulus radii n q, qui ad illam applicatur, comparari legitimè

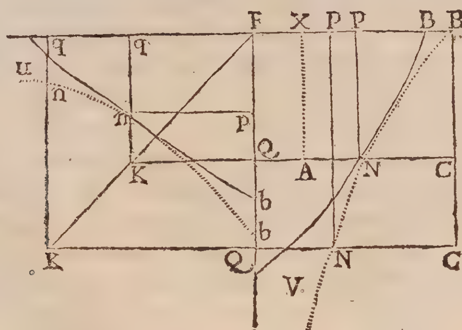


poſſet cum cylindrica ſuperficie ex QN rotata, & ad punctum Q, diſtantiamque Q F ſuo ſolido inſerta; atque utinam id obſervaſſet qui ſolidum hyperbolicum infinitæ latitudinis metiri aggreſſus eſt, non enim illud (perinde ac infinitè longum Torricellii) finito cylindro æquale tam præproperè concluſiſſet, neque exemplis aliis indiviſibilium uſum in ſuſpicionem adducere tentaſſet. Si methodi certitudo ex illegitimis applicationibus ſit æſtimanda, nec Veterum Inſcriptiones extra diſcrimen futuras, quippe iis abuſus eſt Guarinus in ſuo Euclide methodico, ubi Spheroidis, & Conoidum omnium ſuperficiem ad menſuram vocat, atquè ubi generaliter cujuſvis Conoidis ſuperficiem ad cylindricam circumſcriptam ſe habere ſtatuit, ut genitrix figura ad rectangulum circumſcriptum: Fermatius quoque analyticæ ſuæ methodi, perquàm pulcherrimæ, ac ſimpliciſſimæ, applicatione ad tangentem Quadratricis determinandam infœliciter uſus eſt, necnon VVallıſius compoſitione motuum ejuſdem Quadratricis perperam conſiderata, aliam quidem, ſed æquè à veritate alienam ejuſdem tangentis conſtructionem adornavit, utì aliàs

mo-

monuimus. Item Guarinus, Sturmius, Borellius, Rinaldinus circa Spiralis Archimedeæ longitudinem hallucinati ſunt, quamquàm rem ſe demonſtraſſe putaverint, ut in Epiſt. Geometr. ad P. Cevam oſtendo. Quamquàm Viris Clariſsimis, ac de Geometria optimè meritis, quorum ptimus ſuperſtes adhuc hanc ſcientiam novis inventis illuſtrat, nolim quidpiam hoc loco detractum eſſe, quum, ſi quid ipſis fraudi fuerit, humanæ id vitio conditionis, cui omnes obnoxii ſumus, tribuendum ſit, præclariſsimis verò operibus ita ſibi Nominis Immortalitatem comparaverint, ac poſteros devinxerint, ut nihil his decedere poſsit, ex quò ſublimioribus meditationibus diſtracti, haud ſatis attentè perpendere curaverint leviora hæc, quæ ad methodi noſtræ defenſionem, Lectorumque, quibus prodeſſe cupimus cautelam adnotare coacti fuimus, *ne à magnis*, ut ait ille, *nominibus præjudicium fieret Veritati*.

11 Opportunè autem (ut ejuſdem propoſitionis uſus ampliùs pateat) hìc illam applicare juvat curvis ſuperficiebus, quas gignit curva quælibet B N V, tum circa baſim F B, tum



circa axim F Q rotata; utique enim centra gravitatis ejuſmodi curvarum ſuperficierum à circulo ſuæ baſis diſtabunt in iiſdem rationibus, in quibus centrum gravitatis curvæ lineæ genitricis, tum ab axe, tum à baſi diſtabat; idque, facta eadem conſtructione, eodemque ratiocinio manifeſtum eſt, ſumpto puncto N in curva circa baſim, & puncto n ſimili, eo-

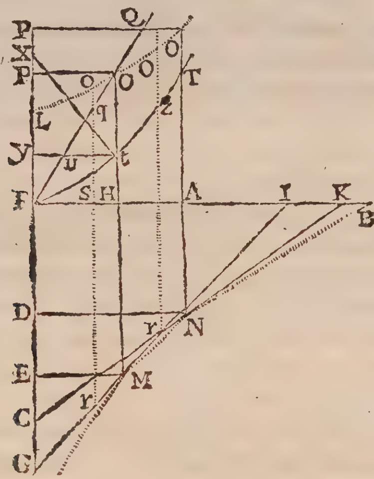
demque

demque (ſeu tantumdem ab homologis extremis diſtante) in curva circa axim rotanda ; utique cùm ſit linea PN ad qn, ut diſtantia qF ad diſtantiam FP (propter æqualitatem homologarum linearum) etiam peripheria radio PN in curva ſuperficie deſcripta per rotationem circa baſim, ad peripheriam radio qn deſcriptam in altera curva ſuperficie ex rotatione ejuſdem curvæ circa axem, erit, ut diſtantia hujus à termino F ad diſtantiam illius ab eodem termino ; æquiponderant igitur ex F dictæ peripheriæ, aliæque omnes per quævis curvæ genitricis puncta in utraque illa converſione tranſeuntes, totidemque in una ſunt, quot in altera termini æquiponderantes, nam dictæ peripheriæ eamdem curvam, & ad idem prorſus punctum ſtringunt, unde non plures hinc, quàm illinc computantur; quare & ipſæ ſuperficies curvæ ex eodem puncto F æquiponderabunt, eritq, reciprocè, ut una ſuperficies ad alteram, ſive ut diſtantia centri gravitatis curvæ à linea, circa quam hinc, & illinc convertitur, ita diſtantia centri gravitatis hujus ad diſtantiam centri gravitatis illius, uniuſcujuſque nimirum à circulo ſuæ baſis per F tranſeuntis. Unde mirùm quot Conoidum ſuperficies centrum gravitatis ſibi determinent. Quæcumque autem de ſolidis rotundis, deque rotundis ſuperficiebus ex eadem figura, vel linea qualibet circa axem, & circa baſim rotata dicta ſunt, perinde ſimiliter obtinere in Ungulis ſolidis, aut ſuperficialibus, plano per axem, vel baſim tranſeunte, & ad eumdem angulum utrinque inclinato, abſciſſis ex cylindris ſuper eaſdem figuras erectis, clariùs eſt, ac inter Geometras magis vulgatum, quàm ut hìc à nobis exponi indigeat, ob proportionalitatem, tum triangulorum ſimilium, quibus Ungulæ ſolidæ ſecantur, cum circulis rotundorum ſolidorum, tum laterum Ungularum ſuperficialium, cum peripheriis circularibus rotundarum ſuperficierum homologarum.

12 Quamquàm in noſtro propoſito Logiſticæ, utique tota curva centro gravitatis carere cenſenda eſt, adeòque ad invenienda utriuſque ſuperficiei curvæ, ambarum ejus Conoideon, centra gravitatis, obſervatio noſtra in hoc, & ſimilibus caſibus inutilis manet; Ratio eſt, quia ſi quod habe-

 ret

ret gravitatis centrum curva Logiſtica B N M, illud certè in axe non foret, eò quòd curva ſuam convexitatem illi obvertat; ſed neque in ulla ab axe diſtantia; quantilla enim hæc foret, circumferentia à tali centro deſcripta, in converſione curvæ circa axem, determinatæ alicuius longitudinis eſſet, & rectangulum ex ipſa in curvam infinitam Logiſticæ, adeòque & ſuperficies curva, in rotatione circa axem deſcripta, immenſæ magnitudinis foret; cùm tamen finitam eſſe ſic demonſtretur. Ad quamlibet ordinatam D N, aut illi parallelam F A B, applicentur ipſæ tangentes N C, M G; itaut



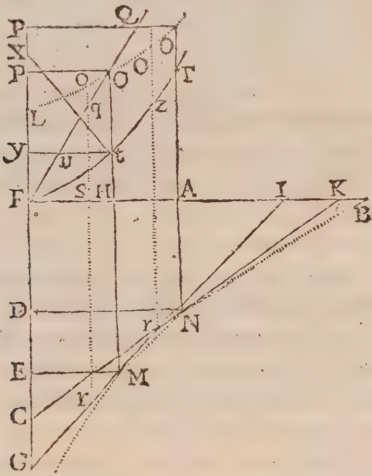
* *interponenda eſset litteris* H, *&* A *littera* s

ductis axi parallelis N A O, M H O, ſecetur A O æqualis tangenti N C, & H O æqualis tangenti M G; atque ita ſemper, quouſque compleatur figura A O O L F. Dico (non in Logiſtica modò, ſed in quavis curva, facta ſimili conſtructione) ſpatium hujus figuræ eſſe ad curvam ſuperficiem ex rotatione curvæ M N circa axem D E, ut radius ad circumferentiam alicuius circuli; id quod valet etiam de partibus proportionalibus, putà ſuperficie O A H O, comparata ad

por-

portionem curvæ ſuperficiei à curva M N, parallelis M H O, N A O intercepta, progenitam; ſumpta ſiquidem quantumlibet parva tangentis particula N r, aut M r, ac ducta parallela r s; cùm ſit tota N C, ideſt O A, ad N r, ut D N, vel F A, ad A s (eodemque modo G M, ſeu O H ad M r, ut E M, vel F H, ad H S) erit rectangulum O A s æquale rectangulo ex D N in N r, & O H S æquale rectangulo ex E M in M r; atque ita ſemper; itaque Ungula ſuperficialis ex cylindrico ipſi curvæ N M inſiſtente, reſecta plano per axem tranſeunte, & per 45. gradus ad planum baſis inclinato (in qua conſequenter erectæ forent ad ſingula curvæ puncta rectæ lineæ ipſis ordinatis æquales) erit æqualis ſpatio congruenti, à curva O o L terminato, quippe tam benè coincident rectangula D N r, E M r cum portionibus talis ſuperficiei, ob tangentes infinitè parvas cum curva coincidentes, quàm coincident rectangula O A s, O H S, cum ſpatio ipſo à curva o O terminato, ob infinitè parvam ſingulorum rectangulorum latitudinem; prædicta verò Ungula eſt ad curvam ſuperficiem à curva circa axem rotata genitam, ut radius ad circumferentiam circuli, quippe in Ungula ordinantur ipſæ D N, E M, punctis curvæ inſiſtentes, in ſuperficie verò rotunda ordinantur earumdem peripheriæ; itaque ſpatium ſic determinatum à curva O o L erit ad rotundam ſuperficiem ſolidi ex curva circa axem rotata, ut radius alicujus circuli ad ejus circumferentiam; & quoties ſpatium A O o L F finitum erit, etiam illa rotunda ſuperficies pariter determinatæ magnitudinis eſſe convincetur; eſt autem illud ſpatium finitum, quoties A O, H O, ideſt ipſæ tangentes N C, M G in immenſum non excreſcunt, utì accidit in noſtro caſu, in quo ſemper fiunt minores, utpote æquales potentia eidem quadrato ſubtangentis, ſimul cum quadrato ordinatæ minoris, ac minoris in infinitum; quò conſtat ſpatium A O L F, cujus longitudo determinata A F, latitudines autem ubique A O, H O, & cæteræ, nedum non infinitæ, ſed ſemper minores, uſque ad ultimam F L ſoli ſubtangenti æqualem, infinitum eſſe non poſſe, imò eſſe minus rectangulo F A O illud circumſcribente.

13 Manifeſtum eſt porrò, curvam O o L in hoc caſu eſſe hyperbolam æquilateram, axe recto F A, ſemitranſverſo F L, ſubtangentis longitudinem æquante, deſcriptam, quippe ultima tangentium, evaneſcente ordinatæ quadrato, erit potentia, adeòque & longitudine, æqualis ſoli ſubtangenti; intellecta igitur F D eidem æquali, ut integer axis tranſverſus ſit D L,



atque ordinatis O P, O P; quoniam differentia quadrati tangentium, ſive ejus æqualium H O, vel A O, ideſt F P, F P, à quadrato ſubtangentis F L, eſt quadratum ordinatæ E M, aut D N, ſive ipſarum O P; erit ſemper rectangulum D P L æquale quadratò P O, adeòque hyperbola L O o æquilatera.

14 Eſt autem hyperbolicum ſpatium A O o L F æquale rectangulo ex ſubtangente Logiſticæ in parabolicam curvam illam, quæ Logiſticam perpendiculariter ſecat, juxta determinationem *cap. 5. num.* 14. propoſitam, quæque eamdem, ſeu æqualem ſuſcipit ordinatam, aut eiſdem axi parallelis interiicitur; ſit enim ejuſmodi parabola F t T, cujus ſemiparameter æqualis ſubtangenti Logiſticæ, videlicet F L, tangenti in pun-

puncto t, ſeu ipſi curvæ perpendicularis t X abſcindens ex axe infra ordinatam t y ipſam y X æqualem ſemiparametro, ſeu ipſi F L (juxta ibidem dicta) itaque X t æquabitur H O, & ducta quavis axi parallela, erit X t ad X y, ſeu O H ad L F, ut quævis tangentis portio, lineis infinitè proximis H t, S q intercepta, ad ordinatæ y t portionem, iiſdem lineis interpoſitam; rectangulum itaque ex hac ordinatæ portione in H O ſemper æquale erit rectangulo ex conſtante linea F L in illam tangentis portionem, omniaque rect-la ſpatio hyperbolico adſcripta æquabuntur rectangulo ex F L in curvã parabolicam F t T, ac partes partibus correſpondentibus; itaque rectangulum ſub circumferentia, radio F L, ſeu ſubtangentis Logiſticæ deſcripta, in curvam parabolicam F t T, æquale erit curvæ ſuperficiei rotundi ſolidi ex Logiſtica N M circa axem voluta progeniti, partes etiam correſpondentibus partibus æquabuntur, & talis curvæ ſuperficiei portiones, planis quibuſcumque D N, E M interceptæ, erunt ut partes parabolicæ curvæ t T, inter axi parallelas ab iiſdem curvæ punctis ductas concluſæ.

15 Affine huic eſt, quod in ſolido ex Tractoria circa axem revoluta nuper detexi, nempe applicatis tangentibus ad ſingula ordinatæ puncta, quæ, utpotè æquales, cõflabunt ſuperficiem parallelogrammam A O P F, ſubtangentis longitudine, & ordinata contentã, erit infiniti illius ſolidi ſuperficies æqualis ſuperficiei cylindricæ ex F A O P circa axem revoluto, quippe quæ pariter ad parallelogrammum O F ſit, ut circumferentia ad radium; quapropter etiam curva Tractoria gravitatis centro carere dicenda erit, ſicut Logiſtica, & aliæ quævis interminatæ lineæ, finitam ſuperficiem ſui rotatione deſcribentes.

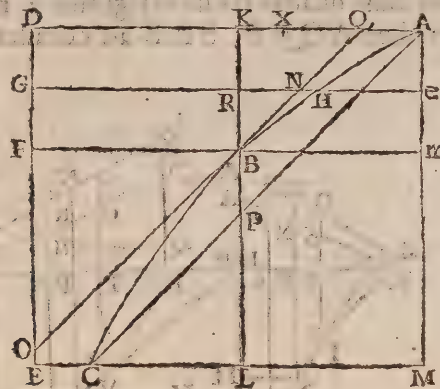
CA-

CAPUT XIII.

Theorema Decimumquintum in quinque partes diviſum aliàs demonſtratum. Figurarum ad eumdem axem compoſitarum, ſi portiones unius proportionentur ordinatis alterius, quomodo tangentes determinandæ. Alia demonſtratio primæ, & tertiæ partis hujus Theorematis. Hyperbolicum ſpatium æquale rectangulo ordinatæ in alteram Logiſticæ ſubtangentem. Tangens Expanſæ Ungulæ cylindricæ determinata. Generalis conſtructio tangentium pro omnibns ungulis etiã ex cylindro non circulari abſciſſis. Solidi ex Logiſtica infinitè longi ſuperficiem finitam eſſe rurſus demonſtratur. Hyperbola ungulæ Logiſticæ correlata; ut parallelogrammum Logiſtico trilineo circumſcriptum ad ipſum trilineum, ita cylindricus Logiſticus ad ſuum truncum, ita & Hyperbolicus cylindricus ad truncum ſuum. Rotundum ſolidum ex hyperbola ad rotundum ex Logiſtica, ut inſcriptum hyperbolæ parallelogrammum ad Logiſticæ ſubtangentis quadratum. Cæteræ Theorematis partes ex longioribus Logarithmorum tabulis determinandæ. Auctoris verba circa hyperbolæ quadraturam ex Tractatu de evolutione curvarum adducta. Hyperbolæ quadratura per Tractoriam.

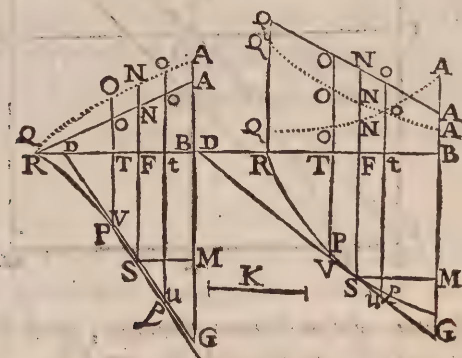
1 ULtimum Hugenii Theorema quinque partes complectitur, quas demonſtraturus, & ſimul referam, & ſuis aſteriſcis, ordinis, & claritatis ſervandæ gratia, diſtinguam: ait

ait igitur: *1 *Notum jam eſt, hanc Logiſticam lineam tetragoniſmo hyperbolæ deſervire, poſt demonſtrationes P. Gregorii à S. Vincentio circa hyperbolica ſpatia, duabus ad alteram aſymptoton ordinatis interjecta.* *2 *Quòdque ſi duo fuerint hujuſmodi ſpatia, in quibus ordinatæ unius ſint, ut AD ad HG*



in ultima figura, & ordinatæ alterius, ut BF ad CE, hæc ſpatia erunt inter ſe, ut lineæ DG, & FE. *3 *Nondum autem, quod ſciam, notatum fuit, hæc ipſa ſpatia hyperbolica eſſe ad parallelogrammum hyperbolæ (ſic voco parallelogrammum, cujus latera ſint duæ ad utramque aſymptoton ordinatæ ex eodem puncto ſectionis ductæ) ut unaquæque linearum DG, FE ad ſubtangentem FO.* *4 *Adeòut, ſi parallelogrammum hyperbolæ ſupponatur partium* 0, 4342944819, *quodlibet hyperbolicum ſpatium duabus ad alteram aſymptoton ordinatis interjectum erit ad hoc parallelogrammum, ut Logarithmus proportionis earumdem ordinatarum, videlicet, ut differentia Logarithmorum numerorum, exprimentium proportionem ordinatarum, ad numerum* 0, 4342944819; *acceptis ſcilicet Logarithmis decem notarum ultra characteriſticam.* *5 *Hinc porrò facile eſt veritatem oſtendere Tetragoniſmi hyperbolæ, abs me propoſiti in Tractatu de Evolutione linearum curvarum, quem Horologio meo oſcillatorio inſerui.*

2 Primam, & ſecundam partem jam *cap. 6. num.* 2. 3. *&* 4. abundè oſtendimus; tertiam quoque partem, adeòque & reliquas ex his conſequentes, ibidem *num.* 6. & 7. in aperto poſuimus, ut nihil opus ſit ſuperaddere, plenioris tamen ſcientiæ, atque Lectorum utilitatis gratia, rurſus eadem demonſtrare aggrediar, generali hoc Lemmate præmiſſo, quod & in præcedentibus quadantenus attigimus: nimirum. Si duo ſpatia quælibet AQRB, SRB ad eumdem axem BR



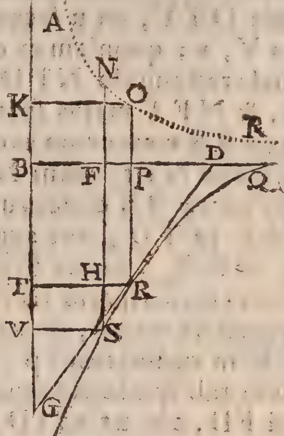
comparata fuerint, itaut ſemper unius portiones, à termino QR computatæ, proportionales ſint ordinatis alterius, putà FNQR ad OTRQ, ut FS ad TP; manifeſtum eſt, quòd conſtans quædam linea K ſe habebit ut parameter comparationis (eo modo, quo *capite* 4. *num.* 2. parametrum Logiſticæ expoſuimus) itaut, ſi K in FS adæquet ſpatiũ FNQR, etiam K in TP adæquet ſpatium TOQR; fiat ergo, ut K ad FN, in FD ad FS (ſeu ponatur NFD rectangulum æquale ſpatio NFRQ) dico junctam DS tangere curvam RPS in S. Patet id, tum ex *cap.* 6. *num.* 8. ubi generaliter monuimus, in curvis præmiſſæ conditionis, eſſe GM ad SF, ideſt, ob triangula ſimilia, FB ad FD, aut rectangulum alteri figuræ adſcriptum BFN ad NFD, ut idem rectangu-

lum

lum ad ſpatium N F R Q, quod propterea æquabitur ipſi N F D rectangulo, eritque, ut K ad F N, ita F D ad F S, quippe cùm tam extremorum, quàm mediorum rectangula eidem N F Q R ſpatio ſint æqualia; tum etiam conſtat ex dictis *capite 5. num. 6. & 7.* ubi ex motuum compoſitione hanc ipſam tangentium conſtructionem, data præſcripta figurarum conditione demonſtravimus; tum denique hoc argumento; ordinentur hinc inde O T V, o t u ſecantes curvam in P, p, rectam verò D S in V, u; quoniam ex conſtructione eſt ſpatium N F R Q æquale rectangulo N F D; eſt verò N F t minus ſpatio N F t o, & N F T majus ſpatio N F T O in figura dextra, ubi curvæ R S convexum axem reſpicit, & è contra in figura ſiniſtra majus N F t, quàm N F t o, minus N F T quàm N F T O, ubi curvæ R S concavum axi obverſum eſt, erit reſiduum ex N F in T D, aut aggregatum ex N F in t D, minus ſpatio o t R Q, majus ſpatio O T R Q in prima figura, & è contra majus ſpatio o t R Q minus O T R Q in ſecunda, ſeu reſpectivè minus, & majus, majus, & minus rectangulo ex K in ordinatam t p, T P, quippe quod juxta conſtructionem tali ſpatio æquatur; habebit ergo N F ad K, ideſt S F ad F D, aut u t ad t D, V T ad T D, minorem, & reſpectivè majorem in prima figura, ſeu majorem, & reſpectivè minorem rationem in ſecunda, quàm habeat t p ad eamdem t D, ſeu T P ad eamdem T D; ideòque t p, & T P in prima figura majores erunt, quàm u t, & V T, minores autem iiſdem reſpectivè ſumptis in ſecunda Lectoris dexteram reſpiciente; & ideò puncta curvæ P, p, erunt utrobique extra rectam D S; quæ propterea tangens erit. Quod fuerat demonſtrandum.

**Animadvertendum in figura ſiniſtra hujus Schematis, in quo duæ figuræ A O Q R ſunt decreſcentes ad partes A B, tertiam iiſdem litteris notatã decreſcentem ad partes oppoſitas R Q (quod attinet ad hoc propoſitum) ſuperfluere, neque ad hoc notatam eſſe, ut huic conſtructioni inſerviat, quum evidens ſit, numquam contingere poſſe, ut, cavitate curvæ R S G ad axem R B converſa, figura ſuperior Q R B A ad partes R Q deficiat, eſſet enim rectangulum N E D, non æquale, ſed majus ſpatio N F R Q.*

3 Cùm igitur ex dictis *cap. 6. num. 4.* lineæ in Logiſtica Q R S axi B V parallelæ, veluti F S, P R ſint ad invicem, ut ſpatia hyperbolica N O R Q F, O R Q P (exiſtentibus A B Q aſymptotis, ordinatiſque F N, P O, Q R alteri aſymptotorum parallelis) patet ſpatium hyperbolicum O R Q P æquari

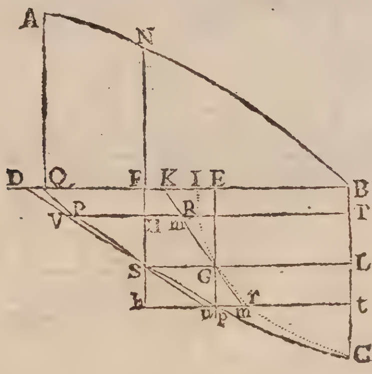


rectangulo O P D, ex ordinata O P in alteram Logiſticæ ſubtangentem P D; unde conſtat, quomodo Logiſtica hyperbolæ quadraturæ conducat, utì in prima hujus Theorematis parte aſſerebatur; ſecundam partem citrà petitionem principii probare hinc nequeo, ſed ſatis evidenter præoſtenſam habes loco citato. Tertiæ partis demonſtratio ſic erit inſtituenda. Rectangulum O P D æquale eſt, ex dictis, ſpatio hyperbolico O R Q P; habebit ergo parallelogrammum hyperbolæ inſcriptum K O P B ad ſpatium O P Q R eamdem rationem, quam idem habet ad rectangulū O P D; ideſt quam baſis B P, ſeu T R ad P D; aut, ob triangulorum ſimilitudinem, quam ſubtangens Logiſticæ G T ad axi parallelam R P. Quod erat demonſtrandum.

* *Supple in figura lineam Q R ipſi N F parallelam, ut pag. 63.*

4 Obi-

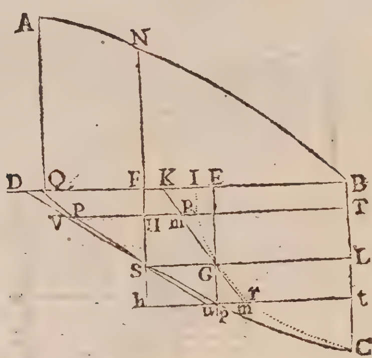
4 Obiter notare potes in demonſtratione *num.* 2. allata, quot curvarum tangentes geometricè determinari queant, præſcriptam nimirùm conditionem ſuſcipientes. In Expanſa sphærica ſuperficie, ſive Ungula quavis cylindrica in planum extenſa (qualem in Demonſtrationibus Vivianeorum Problematum conſideravimus) ſpecimen hìc dumtaxat daturi ſumus. Eſto ejuſmodi ſuperficies Ungularis Expanſa B Q S C; cui inversè ad eumdem axem altera ſimilis, &



æqualis, ſive eademmet replicata, A N B Q applicata eſſe intelligatur. Conſtat ex Propoſitione quinta Demonſtrat. Vivian. Probl. fore totã ſuperficiem B A Q ad partem A N F Q reſectam quavis ordinata N F, ſecante alteram curvam in S, ut ordinata B C ad F S, quia ordinata F N tantumdem diſtat à baſi A Q in figura A B Q, quantùm F S à vertice Q figuræ Q B C; itaque, ſi fiat rectangulum N F D æquale ſpatio A N F Q, juncta D S erit tangens, juxta ea, quæ *numer.* 2. generaliter demonſtravimus. Et ſi ſupponatur Q B C eſſe Ungula plano ſemiquadrantaliter inclinato abſciſſa, ſeu eadem, ac figura ſinuum inſcripti quadrantis B C I, quem axi parallela S L ſecet in G, tangat verò in eodem puncto G K, erit tum F D æqualis K G; demiſſo enim ſinu G E, ac jun-

cto

ſto radio G B, quemadmodum S F æquatur ſinui G E, erit F N æqualis ſinui G L, ſeu E B; eſt autem ſuperficies A N F Q æqualis radio B C, vel B G in ipſam E G, vel B L (utì conſtat ex eadem Propoſitione quinta, vel ex decimaquinta particulatim acceptis) itaque rectangulum N F D æquatur ipſi B G E; porrò hoc æquale eſt E B in K G, propter G B ad E B, ut K G ad G E; itaq; N F D æquatur E B in K G, ſuntque



* *Deficit in Diagrammate linea B G radius quadrantis, de quo in præſenti Demonſtratione.*

N F, E B æquales; ergo & F D æqualis erit tangenti G K; eidemque quantitati æqualis erit (ideſt ſemper erit D F ad F Q, ut tangens ad arcum lineæ Q F congruentem antequàm in planum evolveretur, utì eſt hic arcus G I) etiam ſi Ungula ſemiquadrantalis non ſit, curvarum enim eumdem axem, & ordinatas proportionales habentium eadem eſt, reſpectu ejuſdem à vertice altitudinis, conſtans ſubtangens F D.

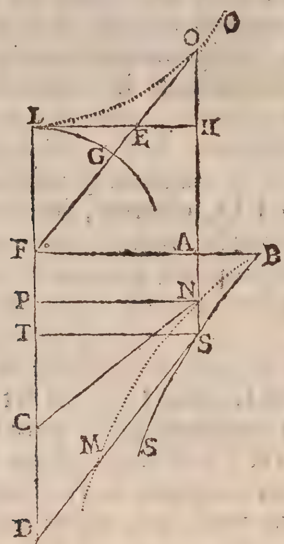
5 Quinimò & ſi Ungula non ex circulari cylindro, ſed ex parabolico, hyperbolico, aut alterius generis curvæ inſiſtente reſecta foret, eadem poſterior conſtructio locum ob-

tineret, quippe & in illis hoc ſemper evenit, ut (ſi fuerint ſemiquadrantales, ideſt inclinatione ſemirecta abſciſſæ) inſcripta figura genitrice (quæ cylindri baſis erat) BCGI, ductaque axi parallela qualibet SGL, erit SL æqualis arcui curvæ GC; nam & tota BQ æqualis eſt curvæ IGC, circa quam in cylindro convolvebatur; & portio QF æqualis portioni IG, utpote ſuſcipiens ordinatam FS æqualem ſinui GE; cui æqualis erigebatur in ſuperficie cylindrica ad punctum G nondum expanſa, adeòque & reliqua FB, ſeu SL æqualis reliquæ portioni GC; His itaque exiſtentibus, ductaque ad punctum G tangente genitricis curvæ GK, atque huic poſita æquali FD, oportet, junctam DS tangere curvam Ungulæ ſic expanſæ, etenim hinc inde ductis parallelis VPHmRT axi propiori, hupmrt remotiori, ſecantibus lineas, ut in figura videre eſt; cùm ſit DF ad HV, vel hu, ut FS ad SH, ſeu Sh, vel KG ad tangentem Gm, poſita jam DF æquali KG, erit prædicta Gm æqualis HV, ſeu hu; verùm propter SL, ſeu HT, vel ht æqualem curvæ GC, & PT, vel pt æqualem RC, ſeu rC, erit HP, vel hp æqualis curvæ GR, vel Gr: eſtque RG minor, ſicut è contra rG major tangente mG; itaque HV major eſt quàm HP, minor verò hu, quàm hp; & utrobiq; puncta V, u rectæ DS ultrà curvam QPSpC: tangit ergo, utì propoſitum fuerat; eademque FD ſubtangens erit omnium aliarum Ungularum etiam non ſemiquadrantalium, propter ordinatas ad eadem axis puncta F ſemper proportionales.

6 Quanta hinc, Deus bone, Veritatum ſeges enaſcitur! At mihi non in hoc campo ſeritur, metiturve, antequàm aliàs promiſſum Sphærocylindricarum Sectionum tractatum invulgem; Unum hoc non diſſimulabo ad Logiſticam pertinens, quo ſimul uſum doctrinæ quadantenus inſinuabo, Nimirùm, ſuperficiem ex Logiſtica circa axem revoluta finitam eſſe, uti ſupra *capite præcedenti, num.* 12. *&* 13. jam monuimus, ex quò Ungula ſemiquadrantalis ex cylindrico ſuper Logiſticæ curva erecto æqualis foret ſpatio hyperbolico ibidem deſignato, hinc etiam ſpontè profluere. Eſto

enim

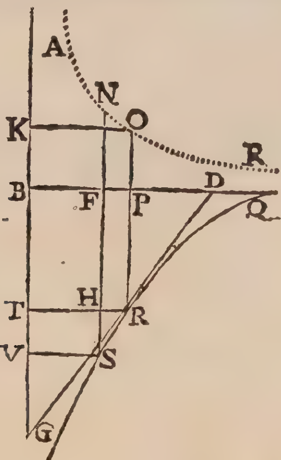
enim talis Ungula cylindrica in planum extenſa FBSS, cum inſcripta ſibi Logiſtica genitrice FBNM; ducta igitur axi parallela ANS, erit ubique AS æqualis curvæ BN,



& tangens Ungulæ ad punctum S erit SD, itaut DT ſubtangens æqualis ſit tangenti NC Logiſticæ ad punctum N; æqualis eſt ergo potentia DS, tum tangenti CN (ideſt ordinatæ AO in ſpatio hyperbolico, quod loco citato determinavimus) tum ipſi TS, ſeu FA; itaque juncta FO erit æqualis ipſi DS, ſed & inter eaſdem parallelas conſiſtunt; æquidiſtat igitur FO tangenti DS; & hoc ſemper; figura igitur FLOO eſt correlata Ungulæ FBSS; illique proptepterea eſt æqualis integrè, & particulatim, juxta doctrinam *cap.* 8. *num.* 3. Immò & hoc ipſo ratiocinio generaliùs concepto, poſſet è contra eadem de Ungularum tangentibus determinatio in omnibus demonſtrari. Hinc enim habetur, figuram ex tangentibus CN ad FB applicatis eſſe Correlatam Un-

Ungulæ FBSS (quæcumque fuerit curva B N M) atque adeò tangentes Ungulæ eſſe parallelas ramis figuræ ex ipſis CN, cui integrè, & particulatim correſpondet ex dictis *cap. præced. num.* 12. illationem firmantibus iis, quæ *cap.* 8. circa finem *num.* 5. monuimus.

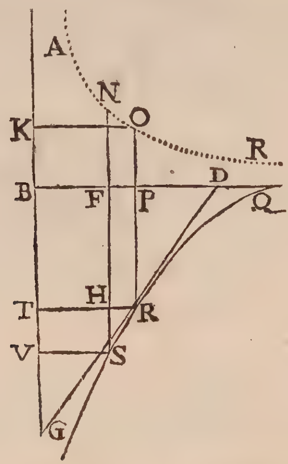
7 Jam & illud obſervandum volo, quòd ex ſecunda hujus Hugeniani Theorematis parte manifeſtò liquet, ſolidum hyperbolicum ex ſpatio OPQR circa OP rotato eſſe ad ſolidum ex ſpatio Logiſticæ correſpondente TRQB circa BQ



in eadem ſemper ratione, in ea videlicet, in qua parallelogrammum hyperbolæ inſcriptum KOBP ad quadratum ſubtangentis Logiſticæ TG; quoniam enim ſpatia hyperbolica lineis OP abſciſſa à termino QR proportionalia ſunt axi parallelis PR in trilineo Logiſticæ RQP, ſi cylindricus excitetur ſuper ſpatio OPQR, idemque ſecetur plano per OP tranſeunte, ad baſim ſemiquadrantaliter inclinato, erit cylindricus ejuſmodi ad truncum inferiorem, plano ſecante, & baſi interceptum, ut parallelogrammum RPQ ad trilineum QPR (id quippe convincit demonſtratio, qua in Vivianeis

 uſus

uſus ſum ad Propoſit. ſeptimam, *pag.* 52. propoſitam, ubi oſtendi, cylindrum ex ductu quadrati a c, in figura loco citato adhibita, in Expanſam ſuperf. ſphericæ I Z A C, eſſe ad truncum ex triangulo I C I in eamdem, ut quadratum, ſeu parallelogrammum c a l i, Expanſæ inversè poſitæ i d a circumſcriptum, ad talem Expanſam; quippe id ex hac ſola affectione pendebat, quòd eſſet ſemper A Z I C ad partem F Z A C, ut linea a c, ſeu R P ad P d, prout in aliis benè multis figuris, ac præcipuè in caſu noſtro verificatur) ſimiliter in eadem ratione rectanguli R P Q ad trilineum Q R P,



erit etiam cylindricus ſuper baſi Q B T R erectus, ad truncum inferiorem, interceptum eadem baſi, ac plano ſimiliter per B Q inclinato, eò quòd partes etiam ſpatii Logiſtici Q B T R per ordinatas à termino T R abſciſſæ, proportionentur lineis in eodem trilineo Q R P baſi P Q parallelis, utì ex primo Hugenii Theoremate, ac dividendo, conſtat, ſunt enim tales parallelæ differentiæ ordinatarum ad cavam Logiſticam, veluti ſpatia ſic intercepta differentiæ ſpatiorum iis ordinatis proportionalium; eſt igitur cylindricus ſuper

O P Q R,

OPQR, cujus altitudo PQ (ob ſemiquadrantalem inclinationem plani ſecantis) ad ſuum truncum inferiorem, ut cylindricus ſuper BTRQ, altitudine BT, ad ſimilem ſui truncum, & ſumptis conſequentium æquè proportionalibus (eſt enim quivis truncus ad rotundum ſolidum ex baſi circa eamdem lineam, quæ eſt baſis, & plani ſecantis communis ſectio, rotata, ut radius ad circumferentiam, ut *cap.* 10. circa mediũ *num.* 1. oſtendimus) erit cylindricus hyperbolicus ad rotundum ex OPQR circa OP, ut cylindricus Logiſticus ad rotundum ex ſua baſi circa BQ; ac permutando, ut ille cylindricus ad iſtum, ita illud rotundum ſolidum ad hoc, quod ultimò expreſſimus. Verùm illi cylindrici in compoſita ſunt ratione altitudinum PQ ad BT, ſeu, ſumpta communi latitudine TG, PQ in TG ad GTB, & baſium, ſcilicet ſpatii hyperbolici, quod æquatur ex dictis ſuprà *num.* 3. rectangulo OPD, ad ſpatium Logiſticum, quod æquale eſt ex ſæpe dictis rectangulo PQ in TG; itaque & rotunda ſolida ſupra deſcripta, Hyperbolicum ad Logiſticum, in compoſita erunt ratione, rectanguli OPD ad PQ in TG, & hujus ad GTB, ideſt, ut OPD ad GTB, quæ denique cùm componatur ex PD ad BT, ſeu PR, vel dicas ex TR, ſeu BP ad TG, & ex OP ad eamdem TG, dabit rationem rectanguli hyperbolæ inſcripti OPBK ad quadratum ſubtangentis Logiſticæ TG. Quod erat demonſtrandum.

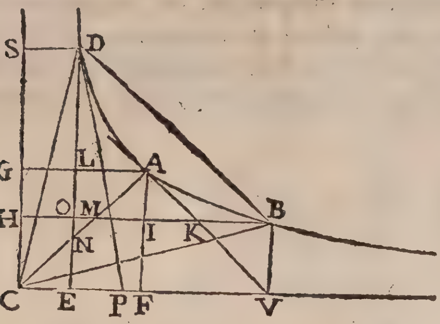
8 Quarta pars demonſtratione non indiget, ſed prolixiorum, quàm apud nos ſint, tabularum Logarithmicarum calculo, quippe aſſignato longitudini ſubtangentis Logiſticæ numero, per quem Hugenius hyperbolæ parallelogrammũ deſignat, tunc diſtantia duarum ordinatarum Logiſticæ exhibebit Logarithmum rationis earumdem ordinatarum (juxta naturam hujus curvæ *cap.* 1. *num.* 3. indicatam) ſeu differentiam Logarithmorum reſpondentium numeris, inter quos eſt ordinatarum Logiſticæ, ac conſequenter & ordinatarum hyperbolæ, ratio, unde cùm ſit ſubtangens ad intervallum ordinatarum Logiſticæ, ut parallelogrammum hyperbolæ ad congruum ſpatium hyperbolicum; ideò per Logarithmicas tabulas facilè erit hinc æſtimare, & calculo eruere numerum cor-

reſpondentem cuilibet dato hyperbolico ſpatio, data ejus extremarum ordinatarum ratione.

9 Quinta ſimiliter Theorematis pars, pertinens ad Tetragoniſmum Hyperbolæ à Clariſſimo Auctore in Tractatu de Evolutione curvarum exhibitum, vel de modo quadrandi hyperbolam per rectificationem curvæ parabolicæ intelligenda eſt, vel per Logarithmos; utrumque enim in præfato libello inſinuatum video; ſi primum, jam ex *cap. præcedenti*, *num.* 14. habes hyperbolicum ſpatium æquale eſſe rectangulo ex Logiſticæ ſubtangente, ſeu generaliùs, ex ſemitranſverſo latere hyperbolæ in curvam parabolicam, dupla parametro deſcriptam, iiſdemq; axi parallelis terminatam. At ſi (quòd aptiùs judicarim) de altero modo per Logarithmos accipienda ſit, quemadmodùm & præcedens pars, ſolo calculo indiget, ac ingentium Logarithmorum tabulis, quæ etſi mihi in promptu eſſent, vereor, ut otii, & patientiæ ſatis habiturus ſim, ut ejuſmodi calculum expenderem; quem idcircò laborem his, qui ſe ejuſmodi ſtudiis exercere voluerint, integrè, & ultrò relinquam, ſiquidem tempus admonet, ut receptui canam, ac Philoſophiæ me reſtituam; ipſum tamen locum ab Hugenio hìc citatum, ex ejus Tractatu de Linearum Evolutione *pag.* 75. Jacobi Panzanini Viri Cl. aliàs abs me infra meritum laudati opera deſcriptum (quippe exemplari carebam) hìc ſubjungere non gravabor, ne quid Lectoribus deſit ad hanc Logiſticæ proprietatum ab Hugenio propoſitarum demonſtrationem illuſtrandam. Inquit igitur Hugenius:

10 *Quæcumque verò Problemata ad alterum è duobus hiſce reducuntur, quamlibet vero proximam ſolutionem per numeros accipiunt, Logarithmorum admirabili invento. Cùm per hos hyperbolæ quadratura, ut olim invenimus, numeris quàm proximè explicetur; eſt autem regula hujuſmodi. Sit D A B portio hyperbolæ, cujus aſymptoti C S, C V, ductis D E, B V parallelis aſymptoto S C. Accipiatur differentia Logarithmorum, qui conveniunt numeris, eamdem inter ſe rationem habentibus, quã rectæ D E, B V; ejuſque differentiæ quæratur Logarithmus, cui addatur Logarithmus hic (qui ſemper eſt idem)* 0, 36221, 56887. *Summa erit Logarithmus numeri, qui ſpatium*

D E



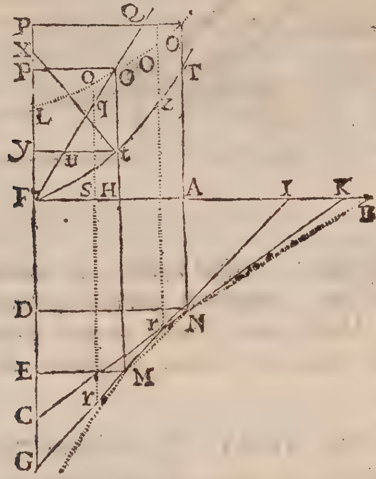
D E V B A D deſignabit, tribus rectis, & curva D A B comprehenſi, in partibus, qualium parallelogrammum D C eſt 100000, 00000. *Unde porrò facilè quoque habebitur area portionis D A B. Sit exempli gratia proportio D E ad B V ea, quæ* 36 *ad* 5.

Ab	1, 55630, 25008,	*Logarithmo* 36.
Auferatur	0, 69897, 00043,	*Logarithmus* 5.
Erit	0, 85733, 14965,	*Differentia Logarithmorum.*
Et	9, 93314, 92856,	*Logarithmus differentiæ.*
Cui addatur	0, 36221, 56887,	*Logarithmus ſemper addendus.*
Fit	10, 29536, 49743,	*Logarithmus ſpatii D E V B A D*

Habebit hujus Logarithmi numerus 11 *caracteres, quum characteriſtica ſit* 10. *quæratur itaque primò numerus proximè minor, conveniens invento Logarithmo, qui numerus eſt* 19740. *Deinde ex differentia Logarithmi ejuſdem, & proximè eum in Tabula ſequentis, reliqui characteres eliciantur* 81026, *ſcribendi poſt priores, ut fiat* 197408, 10260, *addito ad finem zero, ut efficiatur numerus characterũ* 11, *eſt ergo area ſpatii D E V B A D proximè partium* 197408, 10260, *qualium partium parallelogrammum D C eſt* 100000, 00000.

Hæc

Hæc Clariſſimus Hugenius, cujus inventis circa hyperbolæ quadraturam, neſcio an opportunum fuerit è meditationibus noſtris aliquam ad idem propoſitum ſubnectere. Ea eſt, quòd, ſi intelligatur curva B N M eſſe Tractoria, cujus prima



ordinata F B, axis F G, ſitque B vertex, F centrum hyperbolæ æquilateræ, cujus ſemitranſverſus axis F B: ducta ex quovis puncto H axi Tractoriæ parallela H M, erit triangulum, baſi F B, altitudine H M, æquale hyperbolico trilineo, axis portione H B, tangente hyperbolam ex puncto H, & curva intercepta hyperbolæ comprehenſo, uti ex noſtra doctrina de Figuris Correlatis deduci poteſt. Atque hìc eſto noſtræ

HUGENIANORUM THEOREMATUM CIRCA LOGISTICAM DEMONSTRATIONIS

FINIS.

LECTORI
S.

Viſum fuit Appendicis loco hìc ſubnectere Epiſtolam Geometricam, dudum ſcriptam ad Virum Clariſſ. Thomam Cevam, & Poeticis, & Geometricis Opuſculis Celeberrimum, tum quia ſimili, & uniformi cum præcedentibus ſtylo procedit, tum quia pluribus in locis doctrinas à nobis ſuperiùs traditas illuſtrat, & variis exemplis applicat, tum quia num. 19. *non contemnendam animadverſionem continet ad hujus Tractatus argumentum ſpectantem, de* Logiſtica *ſcilicet ex quodam cylindro reſecta; quam æquum fuerat his* Hugenianis *circa* Logiſticam *meditationibus ſubnectere. Vale.*

EPISTOLA GEOMETRICA

AD VIRUM CLARISSIMUM

THOMAM CEVAM

SOCIETATIS JESU.

Noſtra Doctrina de Conicæ ſuperficiei dimenſione per P. Cevam ex Pappo confirmata. Spiralium diverſi generis origo. Quælibet Conica ſuperficies quomodo in planum explicanda, & quævis plana figura quomodo Cono advolvenda. Quarumvis linearum in Coni ſuperficie deſcriptarum Ichnographias determinare, & datis Ichnographiis, lineas in Coni ſuperficie iis reſpondentes reperire. Curvarum transformatio, ad illas comparandas utilis. Ichnographiarum omnium, linearumque ex Coni ſuperficie in planum explicatarum tangentes duplici methodo inventæ. Nova ejuſdem ſupradictæ noſtræ doctrinæ confirmatio. Ad Cono cylindricæ Spiralis extenſionem in planum,

 oſten-

oſtenditur Spiralis Archimedeæ, & Apollonianæ Parabolæ æqualitas. Quorumdam lapſus notati. Infinitarum Parabolarum, & Spiralium comparatio. Novus Cycloidem rectificandi modus. Tranſverſa cylindri Cycloidalis ſectio Parabolæ æqualis, Ungula quoque nil niſi Parabola complicata eſſe dignoſcitur. Rotunda ſuperficies ex Cycloide circa baſim, dupla ejus, quæ ab ipſa circa tangentem verticis rotata producitur. Cylindrum invenire, cujus tranſverſa Sectio propoſitæ cuilibet curvæ ſit æqualis, & Ungula in quamlibet figuram datam explicetur. Ex cylindro Tractoriæ ſecanda eſt Logiſtica. Curva Conocylindrica Spiralis cuidam Parabolæ, longitudine, non poſitione, æqualis eſt. Dimenſio ſuperficiei cylindricæ, utrique ſpirali, & axi Coni interjectæ. Si Spiralis fuerit Geometrica, explicata illa cylindrico-ſpirali ſuperficie, in rectam expandetur.

PRÆSTANTISSIMO GEOMETRÆ,
AC VATI ELEGANTISSIMO

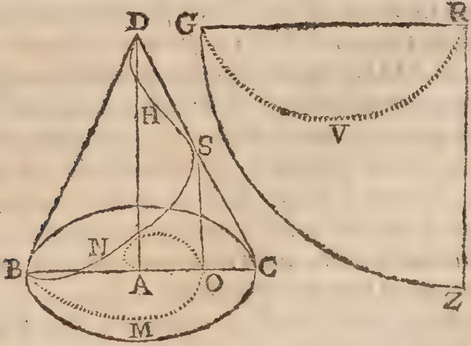
P. THOMÆ CEVÆ

E' SOCIETATE JESU

D. Guido Grandus Monachus Camald. S. P.

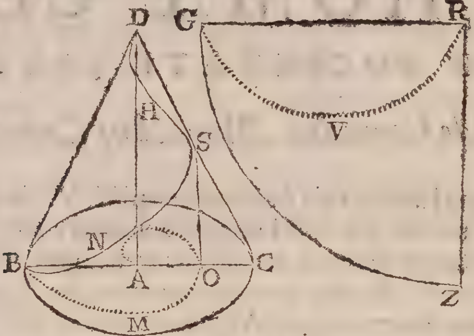
EX quo me litteris tuis decorare cæpiſti, Vir in paucis Cariſſime, nullas, aut mihi magis jucundas, aut Geometrica eruditione magis refertas accepi, iis ipſis, quas XVI. Kal. Julii ad me deſtinaſti. In his, pari humanitate, ac ingenio, doctrinam ſecundæ Propoſitionis Appendicis meæ ad Vivianeorum Problematum Demonſtrationem illuſtrare aggrederis, & minimè contemnēda animadverſione confirmare, oſtendens ipſam cum Pappo Alexandrino conſentire, & ad novas rurſus ſpeculationes viam ſternere poſſe. Sic enim habes, totidem penè verbis tuis latinè redditis.

1 *Eſto Conus rectus D B C, cujus triangulum per axem ſit*



D B C, baſis verò circulus B M C: intelligatur latus D B, pun-

cto D fixo manente, altero extremo B per circumferentiam præfatæ baſis B M C æquabiliter circumferri, eodemque tempore punctum B, æquabili pariter velocitate, ex B per lineam B D aſcendere, deſcribens in Coni ſuperficie Spiralem B S D; adeò ut eodem momento, & latus B D ſe in ſitu B D reſtituat, &



punctum B aſcenſus ſui terminum D attingat, ubi & Spiralis B S D terminus erit. Manifeſtum eſt, Coni ſuperficiem, ſi evolvatur, & explicetur, in circuli ſectorem abituram, qualis eſt R G Z, cujus ſemidiameter R G lateri D B æqualis erit, & arcus G Z circumferentiam B M C B adæquabit. Notum pariter eſt, Spiralem Conicam B S H D in planum extenſam, Spiralis Archimedeæ portionem G V R evaſuram. Conſideretur jam Spiralis Conica B S H D, in qua ſumpto quolibet puncto S, demittatur ad baſim perpendicularis S O: idem ex omnibus ejus punctis factum intelligatur; manifeſtum erit, Ichnographiam prædictæ lineæ fore integram Spiralem Archimedeam, ut liquet in triangulo D A C, in quo C D ad D S in eadem ratione eſt, in qua ſemidiameter C A ad A O; idemque in quovis alio per axem triangulo dicendum erit, quare incrementa, & decrementa ipſius A O erunt in ratione temporum, &c.

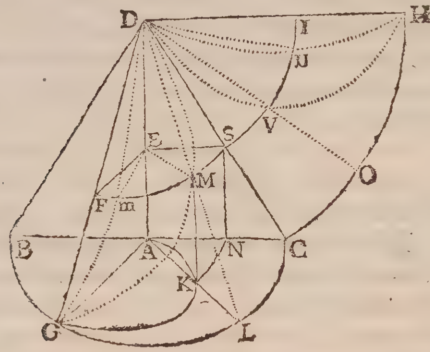
2 *Hoc poſito, (per Coroll. 2. Appendic. tuæ Vivian. Probl.) erit, ut D B ad ſemidiametrum B A, ideſt, ut tota ſuperficies Conica B C D, vel extenſa R G Z, ad circulum B M C, ita ſpatium*

tium ſuperficiei Conicæ BSHDB, ideſt Spirale ſegmentum GVR, ad ſpatiũ, integra Archimedis Spirali contentum, BOAB, & permutando, erit ſector RGZ ad ſegmentum GVR, ut circulus BMC ad integrum Spirale ſpatium BOAB; proptereaque ſector RGZ triplus erit ſegmenti Spiralis GVR; id quod veriſſimum eſt, per Prop. 21. lib. 4. Pappi. Unde hac Geometrica confirmatione doctrinæ tuæ novum robur accedit.

3 *Ponamus jam, lineam GVR eſſe circuli ſemicircumferentiam, ſectorem verò RGZ circularem quadrantem, qui duplus erit ſemicirculi RVG. Convolvatur prædictus ſector, itaut in ſuperficiem Conicam abeat DBC, & peripheria BMCB æqualis ſit arcui quadrantis GZ; manifeſtum eſt, quòd ſemiperipheria GVR circa conum convolvetur, veluti BSHD, & in D terminabit; notum pariter eſt, Ichnographiam ejuſdem lineæ fore Spiralem, ab Archimedea ſpecie diſtinctam, quæ (ex Coroll. citat.) ſpatium comprehendet, quod ad circulum ſit, ut 1. ad 2. Quoniam verò loco ſemicirculi GVR ſubſtitui poteſt quælibet portio, parabolica, hyperbolica, &c. habebimus in earumdem Ichnographiis infinitas Spirales lineas, genere longe diverſas, &c. Quæ quidem omnia tibi ſat nota coniicio, ex ejuſdem Propoſ. Coroll. 6. nec difficilis tibi erit modus ejuſmodi Ichnographias omnes determinandi, quarum tamen conſtructiones, ſi quæ ex omnibus magis ſimplices, & expeditæ videantur, utì & generalem methodum ad ipſarum tangentes ducendas, ſi communicaveris, rem oppidò gratam, & acceptiſſimam facturum te ſcias, &c.*

4 Quid igitur mihi, & olim hoc argumentum, & nunc maximè, tuis excitantibus litteris, rurſus ſpeculanti in mentem venerit, candidè aperiam; ut verò etiam geometrica ſupellectile non ultra mediocritatem inſtructis, in quorum manus Epiſtola hæc mea incidere aliquando poterit, manifeſta eſſe poſſint quæcumque hìc inſerere placuerit, ea ipſa etiam demonſtrabo, quæ apud te demonſtratione non indigent, quale eſt illud, quod tanquam notiſſimum, & vulgò obvium videris ipſe ſupponere (à quo & initium auſpicabor) nempe quomodo Coni recti ſuperficies intelligi poſſit in planum evolvi, & explicari, aut contrà plana quælibet ſuperficies in Co-

Coni cucullum detorqueri. Eſto Coni recti ſuperficies (integra, an dimidia, aut duobus per axem planis intercepta, perinde eſt) D G C in planum explicanda. Centro D, intervallo D C lateris coni, deſcribatur plani circuli portio D C H; ſitque, ut D C ad C A radium baſis coni, ita reciprocè angulus G A C inclinationis planorum, ſuperficiem conicam, quæ explicanda occurrit, intercipientium (vel ita 4 anguli recti in ſuperficie integra, ſeu duo tantùm in dimidia) ad angulum C D H. Dico ſectorem C D H eſſe ipſammet ſuperficiem



conicam D G C in planum evolutam; quia enim arcus eidem angulo ſubtenſi ſunt, ut radii, & qui ab eodem radio deſcribuntur, ſunt, ut anguli, ideò duorum quorumlibet arcuum proportio erit ex rationibus radiorum, & angulorum compoſita, quæ ſi reciprocæ fuerint, ut in caſu noſtro, rationem dabunt æqualitatis; æqualis eſt igitur arcus C H ipſi C G; dnctis verò ex eodem puncto S radii, ſeu lateris D C, arcu S I ipſi C H concentrico, & S F in coni ſuperficie, ubi per planum baſi parallelum F E S ſecatur; conſtat, arcum G C ad F S in ea ratione eſſe, in qua radius A C ad E S (ob communem angulum inclinationis planorum, quibus uterque intercipitur) ſcilicet, ut C D ad D S, vel, ut arcus C H ad S I;

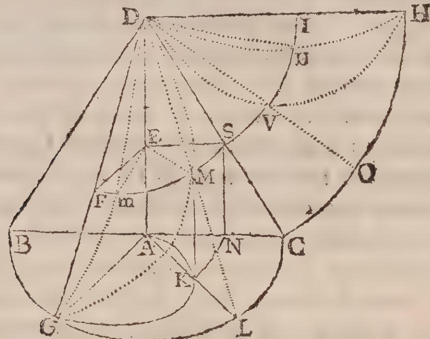
ſunt

ſunt autem antecedentes, nempe arcus G C, C H æquales; ergo & conſequentes F S, S I æquales erunt; atque ita ſemper; cùm igitur omnes arcus ſectoris C D H æquales ſint omnibus, & ſingulis arcubus ſuperficiei conicæ D C G, illos comparando, qui per idem lateris coni punctum tranſeunt, iiſdem applicati omninò congruent; quare ſi ſector complicari circa conum intelligatur, arcus C H congruet arcui C G; & puncto H in G poſito, non poterit non congruere radius D H lateri æquali D G, unde punctum I ſuperponetur ipſi F, & arcus S I congruet eidem S F ſibi æquali, totuſque ſector toti ſuperficiei conicæ reſpondebit, & circa ipſam convolvetur, ſive in ipſam abibit; unde viceverſa, conica ſuperficies D G C evoluta, in eumdem ſectorem C D H explicabitur.

5 Quòd ſi linea, conicam ſuperficiem terminans, fuerit, non alterum coni latus, ſed curva quælibet G M D, non admodùm diverſa conſtructione intentum obtinebimus, quippe invento, ut priùs, arcu ſectoris C H æquali extremo arcui C G datæ ſuperficiei conicæ, ad quodlibet lateris coni punctum S ducto arcu S M in plano baſi parallelo, ponatur arcus S V ipſi C H concentricus in eodem plano, æqualis autem arcui S M, facto ſcilicet angulo S D V in eadem ratione ad M E S, in qua radius S E ad S D (quæ ratio eadem ubique eſt, nimirum radii baſis A C ad latus coni D C) atque ita porrò fiat, quouſque compleatur figura D V H, quæ apta nata erit datæ conicæ ſuperficiei D M G congruere, eodemque argumento probabitur eſſe ejuſdem in planum evolutæ figura.

6 Hinc colligitur (deſcripta curvæ G M D Ichnographia G K A, extenſoque latere D M L, juncto radio A L, radio D V O, & arcu K N) fore ſemper angulum G A C ad C D H, ut M E S, aut K A N ad S D V, & permutando, G A C ad K A N, ſeu L A C, ut C D H ad S D V, vel C D O, aut arcum G C ad C L, ut H C ad C O; unde evoluta conicæ ſuperficiei ſic etiam haberi poſſet, nimirum, invento priùs ſectore C D H, congruente conicæ ſuperficiei C D G, tum arcubus G C, C H ſimiliter diviſis in L, & O, junctiſque radiis A L, D O, ita hunc ſecando in V, ut ille ab Ichnographia ſecatur in K, quouſque per puncta D V H tranſeat linea, deter-

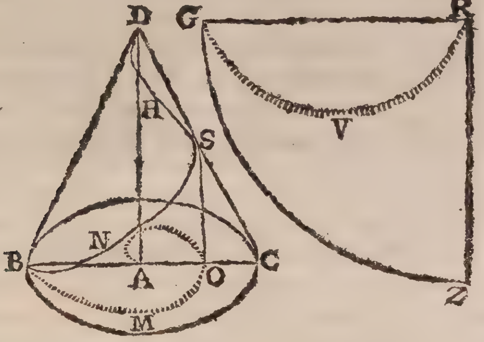
terminans ſuperficiem quæſitam D V H C, eſt quippe, ut L A ad A K, ita C A ad A N, ſeu C D ad D S, O D ad D V, exiſtentibus arcubus H C, C O ipſis G C, C L proportionalibus, ut oſtendimus ex puncto curvæ V per ſuperiorem modum quæſito.



7 Unde è contrario data figura D V H C circa conū D C B complicanda, ut evadat D M G C, facilè habebimus ejus Ichnographiam, facto priùs angulo G A C ad datum C D H ſectoris, datæ figuræ adſcripti, ut C D ad C A, ſectiſque ſimiliter in L, & O arcubus G C, C H, necnon radio A L in K, ut O D dividitur à datæ figuræ perimetro in V: tunc enim punctum K erit in figuræ G K A C, ichnographiā quæſitam determinantis, perimetro. Quæ autem de ſuperficie conica G M D C, ſeu de ejus evoluta C D V H, reſpectu Ichnographiæ A K G C dicta ſunt, eadem, ut conſtat, valent de reſidua coni ſuperficie G M D, ejuſve evoluta D V H, reſpectu ejus Ichnographiæ G K A, quas proptereà ex præmiſſis modis alterutro facilè determinabis, qualeſcumque fuerint curvæ propoſitæ; & ſi linea V H, vel u H recta fuerit, conſtructionē habebis, ducendi in conica ſuperficie lineam G M, ſeu G m, omnium data puncta G, M (non in eodem látere, nec in plano baſi parallelo poſita) conjungentium *Breviſſimam*, ejuſque Ichnographiam deſcribendi.

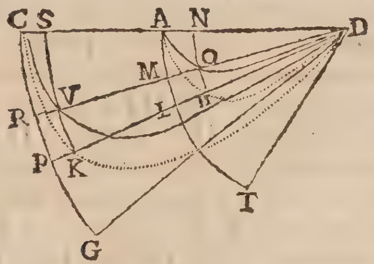
Quo-

Quomodo utcumque ſatisfactum puto quæſtioni, quam moves, determinandi ſcilicet Ichnographiam figuræ tuæ G V R



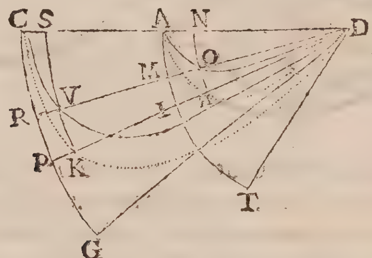
circa conum D C B convolutæ, ſive illa ſit ſemicirculus, ſive parabola, ſive hyperbola, aut alterius cujuslibet generis curva extiterit, unde dabuntur infinitæ illæ Spiralium ſpecies in his Ichnographiis, quas mente jam comprehendiſti. Verùm neſcio an operæ pretium ſit elegantiorem, quam mox ſubdo, conſtructionem illarum attendere.

8 Eſto figura quælibet in Conum convolvenda, aut ex ipſo in planum explicata C V D, & ſector illi circumſcriptus



(inſcriptuſve ſi cava fuerit) D G C; oportet determinare lineam, quæ ejus convolutæ Ichnographiam clauderet in baſi coni dati radii D A, qui minor ſit radio ſectoris D C. Fiat

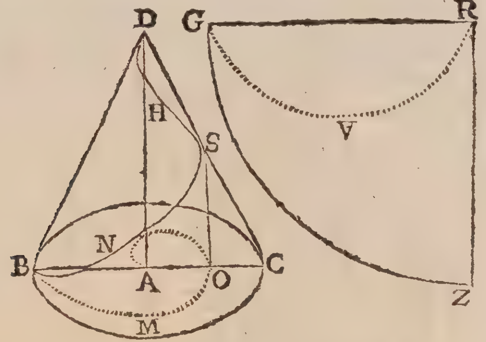
ſuper D A figura A O D ſimilis, & ſimiliter poſita ipſi datæ C V D (ſecto nimirum quovis ramo D V in O proportionaliter, ac ſecetur C D in A, & per puncta A O D ducta linea) & centro D ducto quovis arcu N O H, fiat ſemper H N ad N O in conſtanti ratione lateris coni C D ad radium baſis D A; ajo, puncta H ad Ichnographiã A H D, propoſitæ curvæ C V D reſpondentem, pertinere; erit enim angulus L D A ad R D C, ut radius C D ad D A, unde arcus C R æqualis erit arcui A L;



quando igitur ſector C G D, cum inſcripta figura C V D, convolvetur circa conum baſis A D T, arcu C G congruente ejuſdem baſis arcui ſibi æquali A T, portio C R congruet ipſi A L, & latus D R, cum puncto V curvæ C V D, per quod tranſit, erit ſuperimpendens radio D L, in quo propterea erit punctum ichnographicè ſubjectum puncto V dictæ curvæ; debet autem in eadem ratione diſtare punctum ichnographiæ à centro baſis D, reſpectu radii D L, in quo reperitur, ac diſtet punctum V in latere coni D R à vertice D (ob ſimilia triangula effecta à perpendiculo, ex punctis curvæ in ſuperficie conica exiſtentis ad baſis Ichnographiam demiſſo, qua ratione in præcedenti figura eſt C A ad A O, ut C D ad D S) itaque cùm ſit, ut latus D C ad radium baſis D A, ſeu D L, ita V D, diſtantia puncti V in ſuperficie conica à vertice D, ad D O, ſeu D H, diſtantiam puncti H à centro baſis, erit punctum H, & alia omnia ſimili modo determinata, ad curvam ichnographiæ, quæ quærebatur.

9 E con-

9 E converſo, data ichnographia, lineam ipſi in cono reſpondentem in plano determinabimus; ſit enim talis Ichnographia A H D, & radio D A extenſo in C, ut D C æqualis fiat lateri coni propoſiti, ſuper ipſa fiat figura C K D ſimilis, ac ſimiliter poſita datæ A H D; & ducto ex centro D quolibet arcu S K, ita dividatur in V, ut ſit K S ad S V, ut latus coni C D ad radiū baſis D A; erit punctum V in linea C V D quæſita, quæ in ſuperficie conica impendet datæ ichnographiæ A H D; nam recalcatis præcedentis demonſtrationis veſtigiis, oſtendentur arcus C R, L A æquales, unde applicati congruent, & punctum V ſuperimpendebit ipſi H, quippe tantumdem in latere D R proportionaliter à vertice diſtans, quantùm H in radio à centro D; Vnde facillima habetur conſtructio, nedum Ichnographiæ in tua figura, ubi

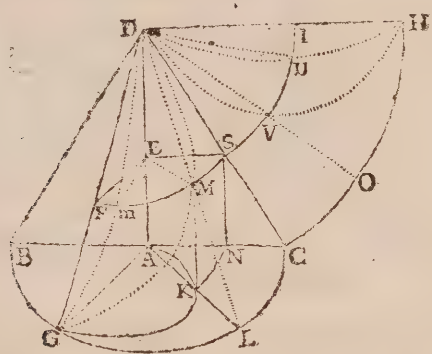


G V R convolvenda ſupponatur ſemicirculus (alio enim ſemicirculo ſuper radio baſis facto, & in arcus concentricos baſi reſoluta, oportet ſingulorum arcuum dicto ſemicirculo comprehenſorum quadruplos determinare, & per eorum extrema curvam ducere, erit enim coni latus radii baſis quadruplum, uti quatuor anguli recti quadrupli ſunt unius ſubtenſi à quadrante G R Z) ſed & ubi ſupponatur parabola, aut hyperbola [facta nimirum ſimili conſtructione, & ex concentricis peripheriis tali parte determinata, quæ ad arcum, radio, & ſimili parabola, aut hyperbola ſuper ipſum deſcripta concluſum

 ſum

ſum, ſit ſemper in data ratione lateris coni ad radium baſis) At è contra ſi cupias Ichnographiam circularem, parabolicam, alteriuſve figuræ habere, manifeſta erit, conſtructio figuræ, quæ cono advoluta ejuſmodi Ichnographiam dare nata eſſet, per ſectionem arcuum concentricorum, peripheria ſimilis figuræ ſuper latere coni deſcriptæ, ipſoque coni latere comprehenſorum, in eadem ratione data, lateris coni ad radium baſis. En quanta curvarum ſeges, quas geometricè determinare poſſumus, quotieſcumque data ratio, lateris coni ad radium baſis, poteſt geometricè angulis applicari, vel per multiplicationem, vel per diviſionem arcuum propoſitorum.

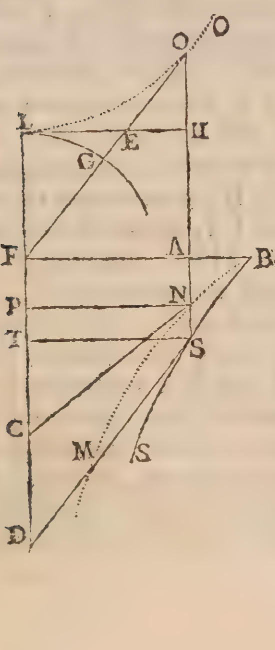
10 Hinc in meo Sphærocylindricarum, & Conocylindricarum ſectionum Tractatu oſtendi, quòd, ſi conus B D C ſecari intelligatur ſemicylindro, cujus baſis ſemicirculus G K A



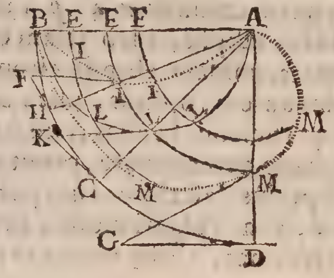
ſuper radio baſis A G deſcriptus, ſitque latus coni duplum verbi cauſa radii baſis, ſeu in quavis alia ad ipſum ratione, facto ſuper D H, æquali lateri coni, ſemicirculo pariter D V H, omnibuſque arcubus V I, centro D deſcriptis, bifariam, ſeu in data ratione ſectis ad puncta u, itaut ſit V I ad u I, ut D C ad C A, linea D u H, per puncta u ſic inventa tranſiens, erit æqualis cono cylindricæ ſectioni; id quod etiam ſucce-

det,

det, ſi loco ſemicirculorum G K A, H V D, ponantur quævis aliæ ſimiles figuræ, ſemper enim communis conicæ, & cylindricæ ſuperficiei ſectio in lineam planam illi æqualem commutabitur; cùmque in Vivianeis *pag.* 122. paulò ante *num.* 37. oſtenderim, lineam quoque Sphærocylindricam, ſeu perimetrũ Veli Florentini, eſſe communem conicæ, & cylindricæ ſuperficiei ſectionem, quam etiam *num.* 41. *p.* 136. oſtendi æqualem perimetro cujuſdam ellipſis, ideò etiam curva D u H, modo præſcripto efformata, cuidam ellipſis circumferentiæ æqualis oſtendetur. Vides autem, opinor, quàm utile ſit eamdem lineam ex variis ſuperficiebus in alias transferre, diverſiſq; conſtructionibus in plano determinare, prout eadem linea elliptica, tum modo ſuperiùs deſcripto, tum per modum ungulæ ex cylindro expanſæ, tum vulgari modo, prout Apollonianam coni ſectionem terminat, aliiſq; modis in plano jacere poteſt, ſemperque diverſas tangentium determinationes ſuſcipit, pro vario ſuarum partium ſitu; contingere ſiquidem poteſt, ut in uno rectificationem reſpuens, in altero illam admittat, vel ſaltem cum alia nota linea comparationem ſuſcipiat. Sic, ſi proponatur linea L O O, cujus hæc proprietas, ut ducto radio F O ex determinato puncto F, ſecante arcum L G, ejuſq; tangentem L E in punctis G, E, ſit ſemper poſt F G radiũ, & ſecantem F E, tertia proportionalis F O, facile erit curvam L O O cum linea Geometris jam ſatis nota comparare, videlicet cum parabola notæ parametri; ſiquidem illa ipſa non alia eſt, quàm parabola evoluta ex ſuperficie coni, cujus triangulum per axem ſit æquilaterum; id quod extra hanc methodum, neſcio an ſatis promptum eſſet conjectura aſſequi, nedum facili geometrica conſtructione determinare.

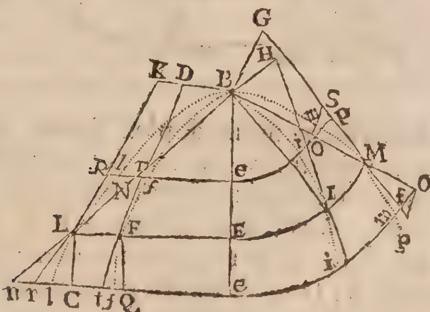


11 Jam, quando ita provocas, operæ pretium eſt, ut curvarum, eo, quem præmiſi, modo deſcriptarum, tangentes univerſali methodo determinare aggrediar, pro quo: aſſumatur quælibet figura A L L B, ductiſque ex centro A quibuſvis concentricis arcubus E L, E L, ſimiliter augeantur producti in M,



aut minuantur diviſi in I, quouſq; per puncta A M M B tranſeat curva, qualem *num.* 8. determinavimus, aut per puncta A I I B tranſeat curva, qualem *num.* 9. deſcripſimus; quæraturque ad datum punctum M, vel I curvarum ejuſmodi tangens: Ducto arcu quolibet, verbigratia extremo B C D, occurrente junctæ chordæ, ſeu radio A M, A I in D, H, ductoque arcu M L, ſeu I L, & juncta chorda A L, ſecante priorem arcum in C, ducantur tangentes arcus D B ad puncta D, H, C, quæ ſint D G, H F, C K; huic ultimæ occurrat in K tangens L K ducta ex puncto L datæ figuræ A L B; in ea autem ratione, in qua ſunt arcus L E ad E M, aut E I, ponatur eſſe data portio tangentis C K ad D G, vel H F. Dico junctam G M, aut F I eſſe tangentem ejuſmodi curvarum in M, I. Si enim hæ curvæ gigni intelligantur ex æquabili motu lineæ A B circa A circulariter converſæ, & motu accelerato, vel retardato, prout opus fuerit, puncti B per B A aſcendentis, aut A per A B deſcendentis (ad modum, quo Spirales generari ſolent) manifeſtum eſt, æquabilem illam velocitatem motus circularis in curva B M A tantò majorem, & in B I A tantò minorem fore, quàm ſit in curva B L A, quantò major eſt arcus M E, & minor E I, quàm E L, ideſt ex conſtructione,

ne, quantò major eſt G D, & minor H F, quàm C K, eodem exiſtente impetu puncti difformiter fluentis, ſive in M, ſive I, ſive in L, propter æqualitatem ipſarum A M, A I, A L, vel reſiduarum D M, H I, C L, quas mobile punctum A, vel B intereà peregit, dum linea circulariter mota reſpectivè arcum D B, H B, vel C B emenſa eſt. Si igitur velocitas difformis in puncto L curvæ B L A exprimatur per L C, etiam eadem velocitas in punctis M, I aliarum curvarum exprimetur per M D, I H illi æquales, & ſi velocitas æquabilis circularis motus exprimatur per C K ad curvam A L B (exprimenda verò eſt prorſus per ipſam, quoniam in ea eſt motus circularis directio, quippe tangens arcus C B, & aliunde intercipitur à tangente L K, angulo recto K C L oppoſita, in qua utriuſque motus compoſita directio reperiri debet, ex 8. Prop. l. 2. Geometriæ motus Joannis Cevæ, qui non cognatione tantum, ſed & geometrico acumine, & inveniēdi fœlicitate Tibi verè Germanus exiſtit) ſimilis æquabilis velocitas ad curvam A M B exprimetur per D G, & ad curvam A I B per H F; propterea juncta G M, & F I tangens erit, ſive ex eadem propoſitione, ſive ex his, quæ *cap.* 5. *num.* 3. demonſtravi in Hugenianis, & antequàm Fratris tui Geometriam legerem, ex Torricellii loco ibidem citato deduxeram. Atque hinc eſt, quòd

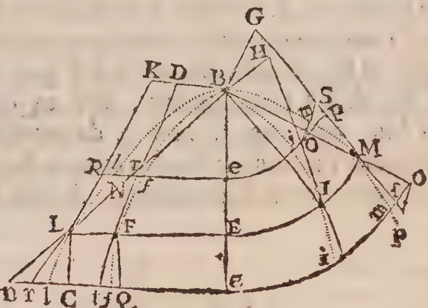


ſi ordinatæ ad axem non ſint arcus cōcentrici, ſed rectæ lineæ, velut L E, F E in eadem ſemper ratione, ductis L C, F Q

axi

axi parallelis, dataque figuræ B L tangente L r, occurrente baſi in r; ſumpta Q t, quæ ſit ad C r in eadem ordinatarum ratione, juncta t F tanget curvam F B; tum enim illæ ordinatæ L E, F E, quemadmodùm & baſis recta C Q e, habendæ ſunt pro arcubus concentricis, à centro infinitè diſtante deſcriptis, cujus radii propterea ſint ipſæ axi parallelæ L C, Q F, ipſæque r C, t Q pro tangentibus extremi circuli C Q e, ob infinitam ejus radii magnitudinem, in unam eamdemque rectam cum ſuis tangentibus abeuntis; cujus conſtructionis veritas jam aliunde innotuit, ſiquidem r L, t F hoc modo deſignatæ in unum & idem axis B E punctum collimabunt, uti ex proprietate triangulorum conſtat.

12 Quòd ſi quis malit independenter à motuum compoſitione eaſdem tangentes evidentiori methodo inquirere, per



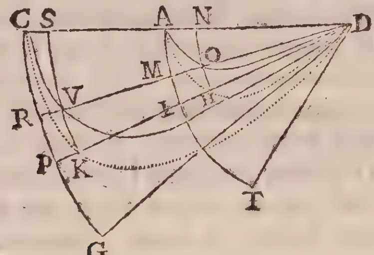
me licet. Eſto enim primùm duplex figura, altera ex rectis L E, l e ad axem ordinatis, altera ex arcubus E M, e m ad eumdem axem applicatis, & reſpectivè æqualibus ipſis L E, l e ſibi correſpondentibus; data tangente L K prioris figuræ, occurrente ipſi B K, ex vertice ductæ æquidiſtanter ad ordinatas, in puncto K, tangens figuræ poſterioris ad punctum M ſic determinabitur; juncto radio B M, atque huic ex B perpendiculari B G, æquali ipſi B K, jungatur G M: dico hanc eſſe tangentem; occurrat enim in S cuilibet alteri ex arcubus concentricis e m, ſecanti radium in O; ſitque O P radio B M

ex

ex O perpendicularis , ac juncta chorda B L, ordinetur per idem axis punctum e applicata prioris curvæ e T, ſecans tangentem in R, chordam in N; erit utique arcus e O æqualis e N, eò quòd ſector ſit triangulo analogus; ſed & e m æqualis e l; itaq; & O m æqualis N l; ipſa verò N R æqualis O P, quia ad B K, æqualem ipſi B G, eſt in eadem ratione, L N ad L B, ſeu E e ad E B, aut O M ad M B; quæ omnia valent etiam de homologis lineis per minuſculas litteras deſignatis, & infra punctum E ductis; hoc ſolo diſcrimine, quòd ſi e ſit ſupra E, erit N R major, quàm N l; unde & O P major, quàm O m; multò igitur magis arcus O S (qui eſt major ipſa O P, à fortiori quàm major ſit ſuo ſinu) erit major, quàm O m; unde punctum S erit extra curvam; ſi verò e acceptum fuerit infra E, erit n r minor, quàm n l; unde & o p minor, quàm o m; arcus autem s o minor eſt tangente o p, à fortiori, quàm ſua tangente minor ſit arcus, quem ex centro B, juncta B p interciperet: multò ergo minor eſt arcu o m; & ideò etiam punctum s extra curvam erit; recta igitur G M tangit. Jam verò concipiatur alia curva B F priori analoga, itaut ejus ordinatæ F E ad ordinatas prioris L E perpetuò ſint in eadem ratione, utiq; facta D B ad B K, ut F E ad E L, juncta D F hanc curvam tanget; ſiquidem ſi occurrat alteri ordinatæ in puncto T erit etiam T e ad e R, ut F E ad E L, nempe ut f e ad e l; quare cùm e R major ſit ipſa e l, etiam e T major erit, quàm e f; ſi igitur intelligatur figura B i I ex arcubus E I æqualibus ordinatis hujus poſtremæ figuræ E F, juncto radio B I, atque huic perpendiculari B H, æquali ipſi B D, juncta H I tanget; eritque H B ad B G, ut I E ad M E. Duarum igitur figurarum, ex concentricis arcubus in eadem conſtanti ratione poſitis deſcriptarum, tangentes intercipiũt rectas ad radium perpendiculariter ductas, ipſis arcubus proportionales: Quod coincidit cum præmiſſa conſtructione.

13 Antequàm autem hinc aliò digrediar, adnotare juvabit, ex harum pariter curvarum deſcriptione doctrinam illam meã ſecundæ Appendicis ad Vivianea Problemata iterum demonſtrari, ſeu denuò confirmari poſſe. Hinc ſiquidem deducitur, Ichnographiam cujuſvis portionis ex conica ſuperficie abſum-

ptæ, qualis eſſet A H D, eſſe mediam proportionalem inter ipſam figuram conicæ ſuperficiei in planum expanſam, veluti D V C, & aliam ipſi ſimilem, ſimiliterque poſitam D O A, ſuper radio baſis coni deſcriptam; nam propter ſingulos arcus H N, ſe habentes ad N O in conſtanti ratione lateris coni C D ad radium baſis A D, erit tota figura A H D ad A O D,



ut C D ad D A; ſed C V D ad A O D ſibi ſimilem eſt, ut quadratum C D ad quadratum D A; itaq; C V D ad A O D eſt in duplicatâ ratione A H D ad A O D, propterea & conica ſuperficies C V D ad Ichnographiam ſuam A H D eſt, ut A H D ad A O D, ſive, ut latus coni C D ad radium baſis D A. Quod &c.

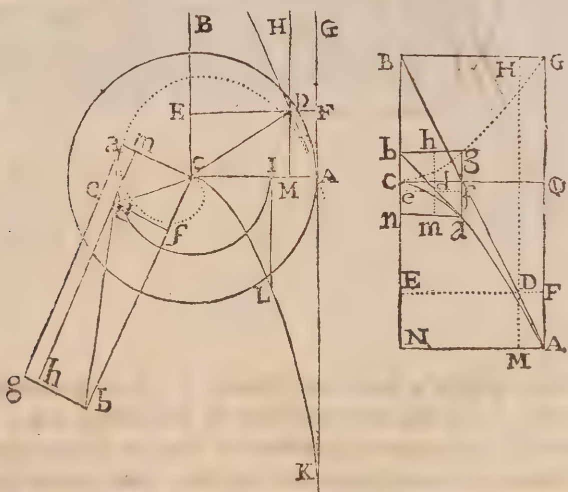
14 Tu verò non hìc ſubſiſtis, & alias rurſus novarum ſpeculationum fodinas eruere aggreſſus, Epiſtolis Tuis, pridie kal. Julii ad me datis, nova iterum ratione lineas in conica ſuperficie deſcriptas in planum ſternere niteris. Ais enim:

Speculationem inſtituere placuit circa Spiralem illam conicam, de qua ſuperioris hebdomadæ Tabellario ad Te ſcriptas Epiſtolas tradidi, cujus Ichnographia integra eſt Spiralis Archimedea; conſiderabam ſcilicet cylindricam ſuperficiem, quam illæ perpendiculares efformant, quibus ſuffulta, ut ita dicam, diſtenditur prædicta Spiralis conica; ſcire autem optabam, in quam lineam evaderet, explicata in rectam lineam Spirali Archimedea, unà cum ipſa ſuperficie cylindrica, ad conicam ſpiralem lineam terminante. Si enim hæc curvam aliquam è lineis aliàs notis referret,

ver-

verbi gratia parabolam, id egregiarum certè Speculationum fodinam aperiret, &c.

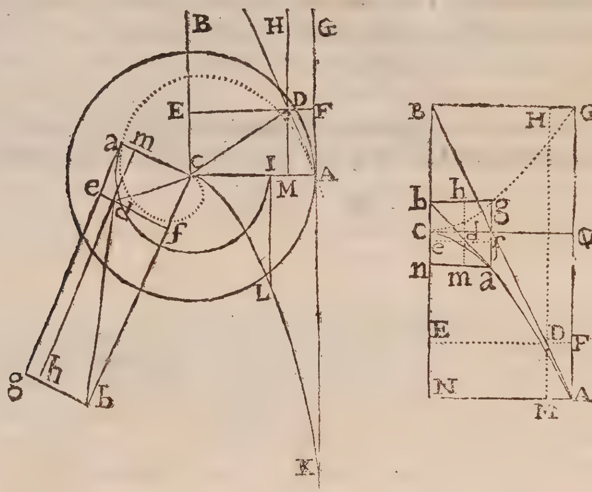
15 Id ego primo ſtatim intuitu ad hyperbolæ quadraturam pertinere opinatus ſum, nec me fefellit opinio, ſiquidem ad illam referri jam tum videbatur parabolicæ curvæ rectificatio, utì ex Hugenianis *cap.* 12. *num.* 14. conſtat, parabolæ autem rectificationem cum Spiralis Archimedeæ diſtenſione conjunctam eſſe, tum ab aliis animadverteram oſtenſum eſſe, tum ipſe poſtmodum docuiſti ab Joanne Ceva fratre tuo Geometr. mot. l. 2. prop. 14. idem demonſtrari. Anteà verò id mihi innotuerat hoc ratiocinio. Eſto Spiralis Archimedea C a A primæ circulationis, & poſito in altera figura Parabolæ Apollonianæ axe C N æquali dimidio circumferentiæ A D A,



ordinata autem N A æquali radio C A, deſcribatur parabola C a A. Dico hanc Spirali æqualem eſſe; ſumpto enim quolibet in parabola puncto a, & ordinata a n; & in ſpirali puncto a, cujus radius a c ſit æqualis ordinatæ a n, ducatur arcus a l; ducanturque tam in parabola, quàm in ſpirali tangentes a b, occurrentes ipſi c b (perpendiculari hinc ad radium c a, illinc

 ad

ad ordinatam a n) in punctis b, b. Jam: cùm ſit C b in ſpirali æqualis arcui a I (ut docuimus in Hugenianis *cap.5. nu.9.*) Sit autem peripheria A D A ad arcum I a in duplicata ratione A C ad C a, ſeu (in parabola) A N ad n a, videlicet, ut N C ad C n; ſitque C N æqualis ſemiſſi peripheriæ A D A, erit & C n æqualis ſemiſſi arcus a I, vel ſubtangentis C b ſpiralis; ſed & ſubtangentis n b parabolæ ſubdupla eſt eadem C n;

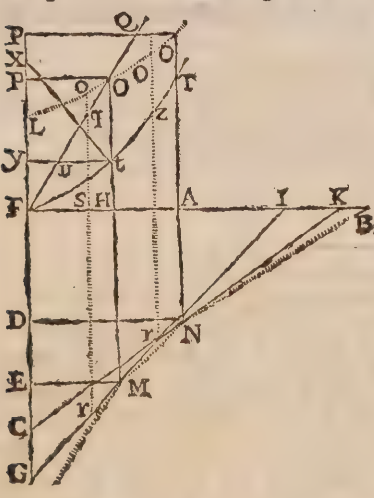


æquales igitur ſunt, tum in ſpirali, tum in parabola ſubtangentes n b, C b; æquales autem & ordinata a n, & radius C a; tota igitur tangens parabolæ a b, quæ his potentia æquatur, æqualis erit tangenti a b ſpiralis ſibi correſpondenti; ſumptaque infinitè exigua utrobique tangentis particula a d, ac dimiſſa in ordinatam, & radium ſubtangentis parallela d m, erunt triangula d m a, d m a utrobique ſimiliter æqualia, applicatiſque alterius ad alteram homologis triangulorum a m d lateribus, tangentes a d, ſeu curvarum partes his reſpondentes congruent, certè eò res deducetur, ut alterius ad alteram proportio ſit propior æqualitati, quàm quælibet data majoris, aut minoris inæqualitatis ratio; æquales igitur ſunt, tum Ar-

chi-

chimedea Spiralis, tum parabola quadratica nuper deſignata.

16 Hinc patet, quàm juſtò minorem Spiralem fecerint, qui ſemicircumferentiæ A D A æqualem eſſe aſſeruerunt, utì Sturmius Math. Enucl. l. 2. cap. 4. conſect. 2. propoſit. 17. Guarinus tract. 18 Eucl. Adaucti prop. 13. Rinaldinus de reſol. & compoſ. pag. 299. aliique; videlicet tantò minorem, quantò axis N C parabolæ C a A minor eſt ipſa curva C a A; conſtat item à ſcopo non leviter aberraſſe Virum Clariſſimum Borellium, ubi de motu animal. p. 2. prop. 41. duas ejuſdem Spiralis revolutiones comparans, ait illas ad invicem eſſe, ut peripheriæ mediæ arithmeticæ inter extremas cujuslibet Spiralis, ſive eſſe ad invicem, ut ſunt circulares zonæ, quibus inſcribuntur; hoc enim perinde eſt, ac ſi diceret, curvam parabolicam t z eſſe ad t S (lineis æquali intervallo diſtantibus, axi parallelis interceptas) ducta recta F O ſecante præfatas parallelas in q, Q,* ut trapezium Q s H O ad O H S q, Quod eſt abſurdum, ſumptis quippe hyperbolicis ſpatiis O O s H, O H S O (iiſdem curvæ portionibus correſpõdentibus per *cap.* 12. *num.* 14. Hugenianorum) & permutando, eſſet Q s H O ad inſcriptũ O O S H, ut O H S q ad circumſcriptum O H S O, ideſt ratio majoris inæqualitatis æqualis foret rationi inæqualitatis minoris.

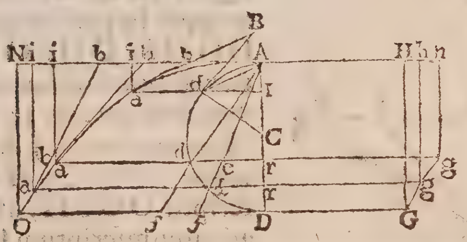


* *Hìc pariter deficit littera* s *inter* H, *&* A.

Cæterùm eo modo, quo parabolam quadraticam, atque Archimedeam Spiralem comparavi, ſimiliter alias ſpiralium ſpecies cum aliis parabolarum ſpeciebus poſſe conferri manifeſtum eſt, uti aliàs, ſi ſatis memini, indicabam; nempe ſi radio-

diorum cujuſcumq; helicis poteſtates denominatæ ab exponente x ſint inter ſe, ut angulorum, ſeu arcuum à radiis interceptorum poteſtates denominatæ ab exponente y, facta parabola talis naturæ, ut abſciſſarum quarumvis poteſtates denominatæ ab exponente y ſint, ut poteſtates ſuarū ordinatarum denominatæ ab aggregato exponentium $y + x$, ſpirali propoſitæ ita reſpondebit, ut ſi ultima ejus ordinatarū æquetur radio dictæ ſpiralis, axis autem ſit $\frac{x}{y+x}$ totius circumferentiæ, illa Curva Parabolica, & ejuſmodi Spiralis æquales erunt, ut ex methodo tangentium, tam parabolarum, quàm ſpiralium, *cap.* 5. *num.* 4. *&* 8. Hugenianorum tradita facilè conſtat.

17 Sed curvarum dimenſionem tractantes quid vetat aliò paulatim digredi, quouſque modum Cycloidem rectificandi tibi communicem, quem tibi acceptiſſimum fore video, quippe his geometricis venuſtatibus delectaris? En illum: eſto Cyclois A a O, ordinatæ a r, a r, ſecantes ſemicirculum ge-

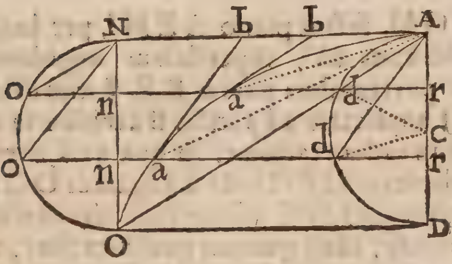


nitorem in d, d; extendantur chordæ A d, A d in f, f uſque ad baſim, applicenturque r g, r g his ipſis A f, A f æquales, ut oriatur hinc curva G g g, quæ erit Hyperbola ſecundi gradus, ſive, ut Cl. Viviano aliquando appellare placuit, *Meſolabica*, propter f A ad A d, ſeu D A ad A r, ut quadratū A f ad quadratum A D, ſive quadratum r g ad D G. Jam ſic: ducta a b Cycloidis tangens quantumvis parva, & duabus prædictis ordinatis quantumvis proximis intercepta, erit utique parallela ipſi A f, ex dictis in Hugenianis *cap.* 8. *num.* 7. erit ergo a b ad intervallum ordinatarum r r, ut A f, ſeu r g ad

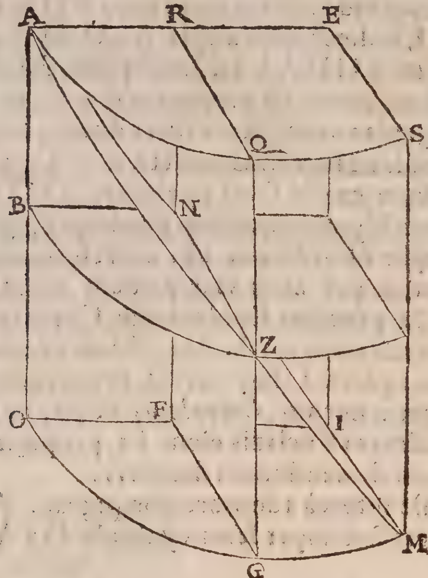
dia-

diametrum A D; & hoc ſemper; rectangulũ igitur g r r æquale erit rectangulo ex A D in a b; & omnia rectangula g r r, exhaurientia ſpatium infinitum g G D A h, æqualia rectangulo ex A D in curvam ſemi-cycloidis A a O, quam innumeræ tãgentes a b perinde exhauriunt; ergo A D in A a O ad quadr. ejuſdem A D, ſcilicet curva ipſa A a O ad diametrum A D, eſt ut ſpatium g G D A h ad inſcriptum diametri quadratum G D A H; hæc autem eſt proportio dupla, ut ipſe *cap.* 8. *numer.* 11. Hugenianorum generaliter docui, atque ipſemet frater tuus ſupra laudatus in Geometr. mot. l. 1. prop. 12. pridem oſtendit; itaque curva ſemi-cycloidis A a O dupla erit diametri, & tota Cyclois ejuſdem quadrupla, quin & partes ſingulæ A a duplæ chordarum ſibi correſpondentium a d, utì aliis Geometris per alias vias pridem innotuit, Hugenio præſertim, ex præclara Evolutarum Curvarum inventione. Eſt verò generalis hæc methodus, ſi rem propiùs aſpicias, atque ad omnes prorſus illas curvas exporrigitur, quas *cap.* 8. *num.* 5. Hugenianorum, *Correlatas* voco, ex quibus ſcilicet, per ſimpliciſſimam Euclidis elem. l. 1. propoſit. 43. innumerarum figurarum dimenſionem derivavi.

18 Duo hìc intereà adnotare non pigeat. Alterum, quòd ſi cylindricus erectus ſuper ſemi-cycloide O a A D ſecari intelligatur plano quomodolibet inclinato, tranſeunte per baſim O D, ſemper abſciſſa ſuperficies ungularis in planũ explicata in parabolam notam abibit; ſiquidem chordæ circuli A d, ad reſpectiva puncta r diametri A D applicatæ, parabolam efficiunt, ergo & earum duplæ, nẽpe portiones curvæ cycloidalis a A, ad eadem diametri puncta, vel ad proportionales partes altitudinis illius ungulæ, applicatæ, parabolam item conficient; ſed omnis ſuperficies un-



gularis conflatur ex ſimilibus curvæ portionibus applicatis ad partes, altitudinis proportionales partibus diametri baſis, utì conſtat ex hac figura, ubi AQSEIMGO ſit cylindricus



ſuper quavis curva IOGM, ſectus plano AZMI, per baſim MI tranſeunte, manifeſtum eſt, ſuperficiem ungularem AZMGO conflari ex portionibus curvæ BZ (æqualibus abſciſſis à vertice OG) applicatis ad puncta B dividentia altitudinem ungulæ AO in eadem ratione, in qua axis curvæ OI ſecatur in F per applicatam GF: Unde ſi fingamus OGM eſſe Cicloidem, cujus portiones OG duplæ ſunt chordarum ſemicirculi ſibi reſpondentis, ideſt quarum quadrata ſunt, ut axis abſciſſæ OF, manifeſtum erit, Ungulam Cycloidalem AZMO eſſe parabolam, quia quadratum curvæ OGM erit ad quadratum curvæ BZ æqualis ipſi OG, ut OI ad OF, ſeu BN, ideſt, ut altitudo OA ad AB, ac perimeter AZM erit æqualis curvæ parabolicæ, imò in parabolam etiam poſitione

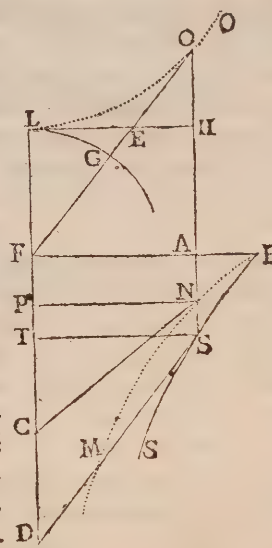
ta-

talem abibit, rectificatis curvis O M, B Z per explicationem ungulæ in planam ſuperficiem, & è contra reliqua ſuperficies A Z M S in trilineum parabolicum extendetur; quo ſtatim conſtat (ob proportionalitatem Ungularum, tum ſuperficialium, tum ſolidarum, cum ſuperficiebus, aut molibus rotundorum corporum ab eadem figura) ſuperficiem rotundam ex Cycloide circa baſim, duplam eſſe rotundæ ſuperficieī ab eadem circa tangentem verticis converſa; necnon diſtantiam centri gravitatis curvæ cycloidalis à baſi duplam eſſe diſtantiæ ejuſdem à vertice, &c. facilèque hinc habetur dimenſio utriuſque ex illis rotundis ſuperficiebus, ob notam curvæ longitudinem, & centri gravitatis diſtantiam, juxta regulam celeberrimam Guldini Veſtri circa geneſim rotundorum.

19 Alterum, quod notari attentiùs velim, inde nullo negotio conſequitur, nempe, data qualibet plana ſuperficie, quæ à curva qualibet linea definiatur, poſſe nos ejuſmodi ſuperficiem ita curvare, ſeu tali cylindrico circumvolvere, ut eadem curva linea nihilominus in uno plano jaceat (quemadmodùm in caſu prædicto, curva parabolica A ZM ita advolvitur cylindro cycloidali, ut nihilominus in uno, eodemque plano A I M, cylindrum ſecante, jaceat) ſeu cylindrum invenire, ex cujus ſectione, eadem curva in ſuperficiem ungularem convoluta efformetur. Propoſitum ſiquidem obtinebimus, alteram ſuperficiem I O G M ita efformando, ut quæ fuerat in data figura relatio ordinatarũ ad axem, eadẽ ſit curvæ portionũ O M, O G pariter ad axẽ ſuum (ut in exemplo noſtro, quæ eſt in cycloide portionũ curvæ à vertice abſciſſarũ ad axis ſui partes ordinatis abſciſſas) enimverò ſuper ejuſmodi curva ſic inventa erecto cylindrico, ipſi advolvetur data figura, & ſuæ perimetri partes in eodem plano, ad datæ figuræ altitudinem ipſummet cylindrum tranſverſim ſecante, diſpoſitas habebit, ſemper autem tangens figuræ quæſitæ O G M ad punctum G, intercepta eodem puncto, & ordinata per verticem O, erit = ſubtangenti datæ figuræ A Z M, ideſt interceptæ inter punctũ Q, & occurſum tangentis puncti Z (explicato parallelogrammo A S M O cum ſua curva AZ M) ut in exemplo cycloidis, cjus tangens ſubdupla eſt curvæ O G, quemadmodũ ipſius A Q

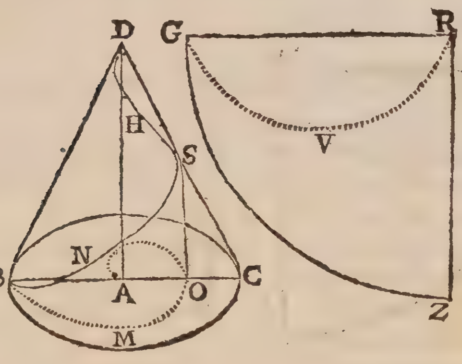
ſubdupla foret ſubtangens parabolæ explicatæ; id quod aliàs generaliter monuimus *cap.5. num.* 2. & faciliimè demonſtratur ex dictis *cap.* 13. *num.*5.

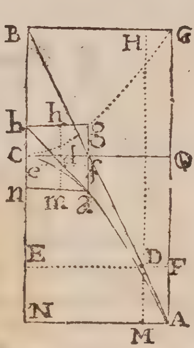
Exemplum aliud ſe ſe obvium præbet in ipſa Logiſtica, ſeu Logarithmica, quam ſi velis ex aliquo cylindro ſecare, aut cylindrum invenire, cui advolvatur, ita ut curva nihilominus in uno plano jaceat, id elegantiſſimè obtinebis per cylindrum ſuper Tractoria erectum, quandoquidem relatio ordinatarum Logiſticæ ad axem mutatur in relationem earumdē ad curvam in Tractoria, utì oſtendimus *cap.* 5. *cit. nu.*2. Concipiatur verbi gratia in plano horizontali D F B erecta ad punctum B haſta quædam ſolidiori baſi marmoreæ B infixa; mox alligata baſi catenula aliqua F B, longitudine æquali parametro, ſeu ſubtangenti datæ Logiſticæ, ejus extremum F trahatur per rectam F D; utique baſis catenulam ſequens deſcribet Tractoriam curvam B N M, & haſta baſi infixa curvam quamdā ſuperficiem cylindricam ſuper ipſa Tractoria erectam; hæc igitur ſecari intelligatur plano aliquo per axē Tractoriæ F D tranſeunte, ad altitudinem extremæ ordinatæ in Logiſtica propoſita, dico ſuperficiem ungularem inde abſciſſam fore nil aliud, quàm ipſammet Logiſticam tali cylindro advolutam; quippe ſi plani inclinatio fuerit per 45. gradus, itaut Logiſticæ ordinata æquetur ſubtangenti ejuſdem, ſeu erecta in ungula illa cylindrica ad punctum B adæquet catenulā B F, conſtat, omnes erectas ad puncta N, M æquales fore ordinatis Tractoriæ N P, unde qualis eſt relatio ipſarum ad curvam B N, talis erit relatio applicatarum illius ungulæ ad ſuum axem, qui illi curvæ B N congruere intelligitur, & explicata illa ſuperficie in planum B S S, utriuſq; ordinatis B F, & axe F D coincidentibus, erit quælibet axi Logiſti-



ſticæ parallela A S æqualis curvæ B N Tractoriæ per dicta *cap.* 13. Hugenianorum *num.* 5. Poſſem & modum inſerere, quo figura quælibet ita complicari in cylindrum poſſet, ut ejus curva ad conicam ſuperficiem terminaret; ſed ne longiùs digrediar,

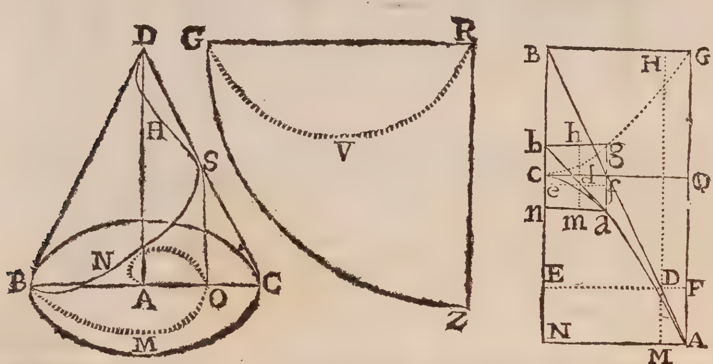
20 Jam ad inſtitutum redeo, & cylindricam illam ſuperficiem ſuper ſpirali erectam, ac cono interclusam contemplor; utique perpendiculares O S ſuper helicis punctis erectæ, & ad coni ſuperficiem terminatæ, proportionantur differentiis radiorum, eſt enim D A ad O S, ut C A, ſeu A B ad C O;





itaque expoſita parabola C a A hanc ſpiralem B O A æquante, ſi ad ſingula puncta a peripheriæ parabolicæ erigi intelligantur æquales differentiis ordinatarum (ubi angulus D C A, trianguli per axem coni ſemirectus fuerit) iiſve proportionales in ratione axis coni D A ad baſis radium A C (ubi ille angulus major, aut minor fuerit ſemirecto) ſeu ſi cylindrica ſuperficies ſuper C a A perimetro parabolæ erecta ſecari intelligatur plano per A Φ tranſeunte, ac tantumdem baſi inclinato, ac latus coni radio baſis inclinetur, ſcilicet per angulum D C A, quomodo erectæ manebunt in ſuperficie cylindrica quæſitæ ordinatarum differentiis (adeòque & differentiis æqualium radiorum circuli A C) proportionales, quippe correſpondentes applicatis trilinei parabolici C a A Φ, erit un-

gula ex tali ſuperficie cylindrica, baſi, & plano ſecante interjecta eadem prorſus, quæ ſuper ſpirali A O B priùs erigebatur, & cono concluſa manebat; Perimeter autem ungulæ cylindri parabolici eſt parabolæ æqualis, utì conſtare poteſt ex propoſ. 3. Append. noſtræ Vivian. Probl. itaque explicata in rectam ſpirali B O A, curva B S H D, non quidem in parabolam, quæ talis poſitione ſit, ſed in ungulæ parabolicæ perimetrum abitura eſt, æqualem longitudine cuidam parabolæ, cujus rectum latus ſit ad latus rectum prioris C a A, ut lateris coni D C quadratum ad quadratum radii A C, axis longitudine ipſi C N æquali remanente; id quod etiam immediatiùs,



& abſque tot ambagibus colligitur, ex quò ipſe demonſtraveris curvam B S H D eſſe ſpiralem conicam, quæ evoluta in Archimedeam ſpiralem abeat, per ſuperiùs dicta *num.* 15. utique ejuſmodi parabolæ æqualem.

21 Dimenſio autẽ ipſius ſuperficiei cylindricæ D H S B O A habebitur, ex rectangulo axis A D in ipſam ſpiralem A O B, vel huic æqualem parabolam C a A, ſubtrahendo tale ſpatium, quod ad portionem ejuſdem parabolæ, duabus ad axem ordinatis interceptam, quarum altera ex foco, altera tantò infra ipſum, quantus eſt totus axis, ſit in ratione axis D A ad radiũ A C; reſiduum quippe erit ſpatium ungulæ ſuprà determinatæ; id quod analyticè ſic deſcribi poteſt. Radius A C ſit $=$ *r*, & $\frac{1}{4}$

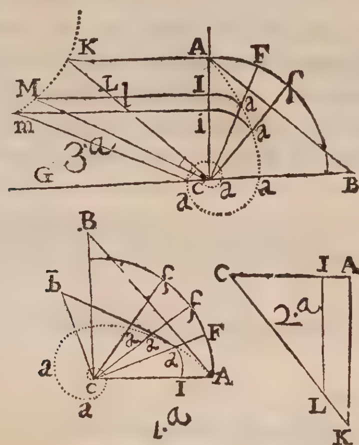
ba-

baſis quadraticis inſcribendæ quadranti circulari radii A C (vel ſemiſſis lateris recti parabolæ C a N, ideſt tertiæ proportionalis poſt ſemiperipheriam, & radium) ſit $= c$; quæ verò utriuſque poteſt quadratum (quæ ſcilicet foret parabolæ perpendicularis in A) eſto $= u$; axis coni A D eſto $= a$; ſuperficies hyperbolæ æquilateræ interceptæ ſemitranſverſo æquali ipſi c, & ordinata ad rectæ diametri portionem æqualem ipſi r, eſto bb. Erit cylindrica ſuperficies ſpirali imminens, & cono concluſa A D H S B O A $= \frac{abb}{c} - \frac{au^3}{3rc} + \frac{acc}{3r}$; nam linea ſpiralis, ſeu parabolica, utpote cum c continens rectangulum $= bb$, erit $\frac{bb}{c}$, tota igitur cylindrica ſuperficies ſpirali imminens, & uſque ad apicem coni completa, erit $\frac{abb}{c}$

Verùm inde ſubtrahenda eſt Ungula ſuperior, cujus ſpatium, ad portionem parabolæ interceptam ordinatis, c ex foco, & u tantò longiùs ab ipſo, quanta eſt ſemiſſis circumferentiæ, ſeu axis datæ parabolæ, ſit in ratione a ad r; cùm verò integræ portiones parabolæ, abſciſſæ à vertice per ordinatas u, & c ſint, ut u^3 ad c^3; dividendo, portio truncata intercepta ordinatis, u, c erit ad portionem interjectam vertici, & minori ordinata c, ut $u^3 - c^3$ ad c^3; eſtque portio interjecta vertici, & foci ordinata $c = \frac{1}{3} cc$; igitur truncata illa portio ordinatis c, & u intercepta erit $\frac{u^3}{3c} - \frac{cc}{3}$; & quæ ad hanc eſt in ratione a ad r erit $\frac{au^3}{3rc} - \frac{acc}{3r}$; qua ſubtracta ex $\frac{abb}{c}$ fit $\frac{abb}{c} - \frac{au^3}{3rc} + \frac{acc}{3r}$ $=$ cylindricæ illi portionis ſpiraceæ B S H D A O B cono incluſæ.

22 Nihil, ut arbitror, attinet contemplationem ulteriùs extendere, quum omnia ipſe mentis excurſu jam præoccupaveris, ſed ſi optaris ejuſmodi ſpiraceæ cylindricæ ſuperficiei portionem, qua explicata in planum, rectificata perimetro B O A, etiam B S H D in rectam abeat, ſume ſpiralem Geome-

metricam A a C; nam & in coni ſuperficie ſimilem ſpiralem habebis (utì eodẽ tuo ratiocinio conſtat) quæ potentia æqualis erit ipſi C a A, & axi coni ſuper illa perpendiculariter erecti,



propter radios A C, a C proportionales curvæ portionibus C a A, C a a ab ipſo centro abſciſſis, ut colligitur ex dictis *cap.* 5. Hugenianorum *num.* 10. adeòque & differentias radiorum F a, f a curvæ portionibus A a reſpondentes.

Hæc habui, quæ raptim ad Te ſcriberem Vir Clariſſ. & quæ Tuis elegantiſſimis ſpeculationibus reponerem; de controverſia autem Mechanica, quæ hactenus nos commiſit, erit aliàs diſſerendi locus, eſto enim utilior ſit Statica illa diſſertatio, jucundior tamen, minùſque in lubrico poſita, Geometricarum rerum ſedula meditatio. Vale, meque, ut facis, amare perge; quamquàm, non eſt cur de hoc ſim ſollicitus, inſitæ enim Humanitatis tuæ ſtimulos habes, quibus in id incitaris. Dabam Kal. Aug. &c.

APPROBATIONES.

LIbrum, cui titulus eſt, *Geometrica Demonſtratio Theorematum Hugenianorum*, elaboratum ab Adm. Rev. & Excell. P. D. Guidone Grandi Monacho Camald. Matheſeos Profeſſore, & in Almo Piſarum Collegio Philoſophiæ publico Lectore, de mandato to Reverendiſſ. P. Generalis attentè perlegi: Et cùm nihil in eo reperiatur, quod Catholicæ Fidei, boniſque moribus adverſetur, exiſtimo poſſe Typis mandari: imò ut mandetur, debita Matheſeos Amatoribus, ipſiſque mathematicis diſciplinis, juſtitia exigit. Petunt enim iſtæ, quæ (licèt magna ex parte nova) ſua tamen ſunt, ac pleno jure ad ipſas pertinent. Exigit etiam Religionis decor, ut Auctoris ingenium, & inveniendi fęcunditas magis per Orbem patefiat, ne ſibi debita laude fraudetur. Ita, &c. D. Martinus Angelus Franchi Monachus ejuſdem Congreg. S.T Mag. & in Monaſterio Angelorum Florentiæ Prior. Dat. Florentiæ ex d. Monaſterio hac die 16. Julii 1701.

IN Geometrica Demonſtratione Theorematum Hugenianorum Adm. Rev. & Exc. P.D. Guidonis Grandi in Piſano Atheneo Publici Phil. Profeſſ. & S.Th. Mag. quem juſſu Reverendiſſ. P. Gener. Ordinis noſtri diligenter expendi, nihil occurrit, quod S. Fidei Catholicæ, boniſve moribus adverſetur, imò cùm innumeras Geometricas veritates generaliſſimis, ac facillimis variarum demonſtrationum methodis ejuſmodi Opuſculo maximè illuſtratas invenerim, Litterariæ Reipublicæ intereſſe judico, ut illius editio minimè ulteriùs differatur. Ita ſentio ex Monaſt. Angelor. Flor. XVII. kal. Auguſt. ego D. Silvanus Ciapetti Monach. Camald. S.T.M. & in præfato Monaſt. Philoſ. Lector.

NOS D. DAMASCENUS DE MUTIIS ABBAS SS. HIPPOL. Et Laurentii de Faventia, & totius Camald. Ord. Generalis.

CUM Opus inſcriptum, *Geometrica Demonſtratio Theorematum Hugenianorum, &c. P. D. Guidonis Grandi in Piſano Atheneo Lectoris, & noſtræ Congregat. Monachi*, duo ex eadem Congregat. S. Theol. Magiſtri, quibus id commiſſum fuit, recognoverint, ac in lucem edi poſſe probaverint, facultatem facimus, ut Typis mandetur, ſi iis, ad quos ſpectat, videbitur. Datum Faventiæ ex noſtro Monaſt. SS. Hippoliti, & Laurentii die 21. Julii 1701.

D. Damaſcenus de Mutiis Abbas Gener. Camald.

Loco ✠ Sigilli.

D. Marius Felix Ferrari Canceil. Congr.

IL Molto Rev. P. Giovanni Scarlatti della Compagnia di Gieſù riveda la preſente Opera Matematica del M. R. P. Guido Grandi Monaco Camaldolenſe, e referiſca ſe vi ſia coſa contro la S. Fede, e buoni coſtumi. Dat. adì 20. Luglio 1701.

Tommaſo della Gherardeſca Vic. Gen.

De mandato Illuſtriſſ. & Reverendiſſ. D. Comitis Thomæ de Gherardeſchis Vicarii Generalis Florentini, ego infraſcriptus legi, & attentè conſideravi Librum, cui titulus eſt, *Geometrica Demonſtratio Theorematum Hugenianorum circa Logiſticam, ſeu Logarithmicam lineam*, compoſitum ab Eruditiſſimo Viro D. Guidone Grando Cremonenſi Monaco Camaldulenſi, & in Almo Piſano Lyceo Publico Philoſophiæ Profeſſore, nihilque in eo reperi, quod Catholicæ Fidei, vel bonis moribus adverſetur, imò verò dignum exiſtimo pro litteratorum eruditione, qui Typis mandetur; gratumque ſpero futurum omnibus ſtrictè Matheſis Profeſſoribus.

Ego Joannes Scarlattus Societatis Jeſu.

Imprimatur, ſtante prædicta relatione

Thomas de Gherardeſca Vic. Gen.

DE mandato Rev. P. Inquiſit. Gener. Flor. A. R. P. M. Antonius Franciſcus Cioppi Min. Conv. Conſultor hujus S. Officii legat perattentè, utì ſolet, præſentem Librum, cui titulus eſt, *Geometrica Demonſtratio, &c.* & referat, an ejuſdem poſſit permitti impreſsio. Dat. in S. Off. Flor. die 24. Julii 1701.

F. Lucius Auguſtin. Cecchini de Bon. Min. Conv. Vic. Gen. S. Off. Fl.

JUſſu Paternitatis Tuæ Reverendiſſ. attentè perlegi Librum, cui titulus eſt, *Geometrica Demonſtratio, &c.* compoſitum ab Erudito Viro D. Guidone Grando Cremonenſi, Monaco Camaldul. & in Almo Piſarum Lyceo Publico Philoſophiæ Profeſſore, nec in eo aliquid inveni, quod Catholicæ Fidei, nec bonis moribus adverſetur, ideò dignum exiſtimo, ut Typis mandetur. Datum Flor. die 27. Julii 1701. ita ſentit

F. Antonius Franciſcus Cioppi Min. Conv. Conſult. S. Off. Flor.

Attenta ſuprapoſita relatione Imprimatur

F. Lucius Auguſt. Cecchini de Bon. Min. Conv. Vic. Gen. S. Off. Flor.

Philippus Bonarota Senat. & Regiæ Celſitud. Auditor.

64538.

9251.

26324.